

## MATHEMATIQUES

Durée: 3h

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Dans ce problème, on considère la fonction définie pour tout  $x$  réel par :  $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

**Les parties III et IV sont indépendantes des parties I et II.**

### PARTIE I : Une famille de fonctions polynômiales.

I.1. Montrer que la fonction  $\psi$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Notations :

Pour tout  $n$ , entier naturel non nul, on note  $\psi^{(n)}$  la fonction dérivée  $n$ -ième de  $\psi$  et on pose  $\psi^{(0)} = \psi$ .

$E$  étant un espace vectoriel réel, on rappelle qu'un endomorphisme de  $E$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E$ .

Pour tout  $n$ , entier naturel, on note  $P_n$ , la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \psi^{(n)}(x).$$

I.2. Déterminer  $P_0$ ,  $P_1$ , et  $P_2$ .

I.3.a. Vérifier pour tout  $n$ , entier naturel, et pour tout  $x$ , réel, l'égalité (1) :

$$P_{n+1}(x) = P'_n(x) - xP_n(x) \tag{1}$$

I.3.b. En déduire que  $P_n$  est une fonction polynômiale de degré  $n$  à coefficients entiers.

I.3.c. Quel est le coefficient du terme de degré  $n$  dans  $P_n$  ?

I.4.a. Vérifier que la fonction  $\psi$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :  $y'(x) + x \cdot y(x) = 0$ .

I.4.b. En déduire pour tout  $n$ , entier naturel, et pour tout  $x$ , réel, l'égalité (2):

$$P_{n+2}(x) = -xP_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x) \tag{2}$$

I.5. Montrer que pour tout  $n$ , entier naturel, et pour tout  $x$ , réel, on a l'égalité (3) :

$$P'_n(x) = xP'_n(x) - nP_n(x) \tag{3}$$

### PARTIE II : Résolution d'une équation différentielle.

Notations:

Dans cette partie  $k$  désigne un entier naturel et on note  $E_k$  le sous espace vectoriel des fonctions polynômiales, à coefficients réels, de degrés inférieurs ou égaux à  $k$ .

On note  $f_k$  la fonction définie sur  $E_k$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall Q \in E_k, f_k(Q)(x) = xQ'(x) - Q''(x).$$

II.1. Vérifier que  $f_k$  est un endomorphisme de  $E_k$ .

II.2.a. Montrer que  $\mathcal{B}_k = (P_0, P_1, \dots, P_k)$  est une base de  $E_k$ .

II.2.b. Montrer que pour tout  $m$ , entier naturel inférieur ou égal à  $k$ ,  $P_m$  est un vecteur propre de  $f_k$  pour une valeur propre qu'on précisera.

II.3. Soit  $M_k$  la matrice de  $f_k$  dans la base  $\mathcal{B}_k$ .

II.3.a. Déterminer  $M_k$ , ainsi que son rang.

II.3.b. Préciser une base du noyau et une base de l'image de  $f_k$ .

II.4 On suppose dans cette question que  $k = 3$ . On note  $T$  la fonction polynômiale de  $E_3$  définie pour tout  $x$  réel par :  $T(x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1$ .

II.4.a. Déterminer les coordonnées de  $T$  sur la base  $\mathcal{B}_3$ .

II.4.b. Dédurre de II.3. une solution particulière, dans  $E_3$ , de l'équation différentielle  $(L)$  sur  $\mathbb{R}$  :

$$xy'(x) - y''(x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1 \quad (L)$$

On note par la suite  $Q_0$  l'élément de  $E_3$  ainsi défini.

II.4.c. Soit  $Q$  un élément de  $E_3$ , également solution de  $(L)$ ; montrer que  $Q - Q_0$  appartient à  $\ker(f_3)$ .

II.4.d. Dédurre de ce qui précède l'ensemble des solutions de  $(L)$  dans  $E_3$ .

### PARTIE III : Un équivalent en $+\infty$

Rappel et notations :

On rappelle que  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t)dt$  est définie pour tout  $x$  réel.

La fonction  $\Phi$  correspondante vérifie :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$ ; elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\Phi' = \psi$ .

Dans cette partie, on définit pour tout  $x$  élément de  $\mathbb{R}_+^*$ , les expressions :

$$g_0(x) = \frac{\psi(x)}{x} \text{ et } g_1(x) = \psi(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right).$$

III.1. Montrer que les fonctions  $g_0$  et  $g_1$  sont continues et dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

III.2. Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_0(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = 1$ .

III.3. Vérifier que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $g_0'(x) = -\psi(x)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$  et  $g_1'(x) = \psi(x)\left(-1 + \frac{3}{x^4}\right)$ .

III.4. En déduire que, pour tout  $x$  réel strictement positif, on dispose de l'encadrement :

$$g_0'(x) \leq -\psi(x) \leq g_1'(x).$$

III.5. Montrer que pour tout couple  $(x, y)$  de réels strictement positifs vérifiant  $x \leq y$  :

$$g_1(x) - g_1(y) \leq \Phi(y) - \Phi(x) \leq g_0(x) - g_0(y) .$$

III.6. En déduire que pour tout  $x$ , réel strictement positif :

$$g_1(x) \leq 1 - \Phi(x) \leq g_0(x) .$$

III.7. Montrer que lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $1 - \Phi(x)$  est équivalent à  $\frac{1}{x}\psi(x)$  .

#### **PARTIE IV : Evaluation de la queue de distributions de probabilités.**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle admettant une densité de probabilité et telle que

$$\forall \alpha > 0, P[X > \alpha] > 0 .$$

On note  $F_X$  la fonction de répartition de  $X$ .

Pour tout couple  $(\alpha, \varepsilon)$  de réels strictement positifs, on note  $p(\alpha, \varepsilon)$  la probabilité conditionnelle

$$p(\alpha, \varepsilon) = P([X > \alpha + \varepsilon] / [X > \alpha])$$

IV.1. Montrer que  $\forall (\alpha, \varepsilon) \in (R_+^*)^2$  ,  $p(\alpha, \varepsilon) = \frac{1 - F_X(\alpha + \varepsilon)}{1 - F_X(\alpha)}$  .

IV.2. Dans cette question,  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , de densité proportionnelle à  $e^{-\lambda t}$  pour  $t \geq 0$  et nulle pour  $t < 0$ .

IV.2.a. Déterminer  $F_X$  à l'aide de  $\lambda$ .

IV.2.b. Pour tout couple  $(\alpha, \varepsilon)$  de réels strictement positifs, simplifier l'expression de  $p(\alpha, \varepsilon)$  .

IV.2.c. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , déterminer la limite de  $p(\alpha, \varepsilon)$  quand  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ .

IV.3. Dans cette question,  $X$  suit la loi normale centrée réduite.

IV.3.a. Reconnaître  $F_X$  à l'aide des fonctions introduites au III.

IV.3.b. En utilisant la question III. 7., déterminer, pour tout  $\varepsilon$ , réel strictement positif,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} p(\alpha, \varepsilon) .$$

IV.3.c. En déduire que pour tout  $\varepsilon$  , réel strictement positif donné,  $P(\alpha < X < \alpha + \varepsilon)$  est équivalent à  $P(\alpha < X)$  quand  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ .

————— FIN —————