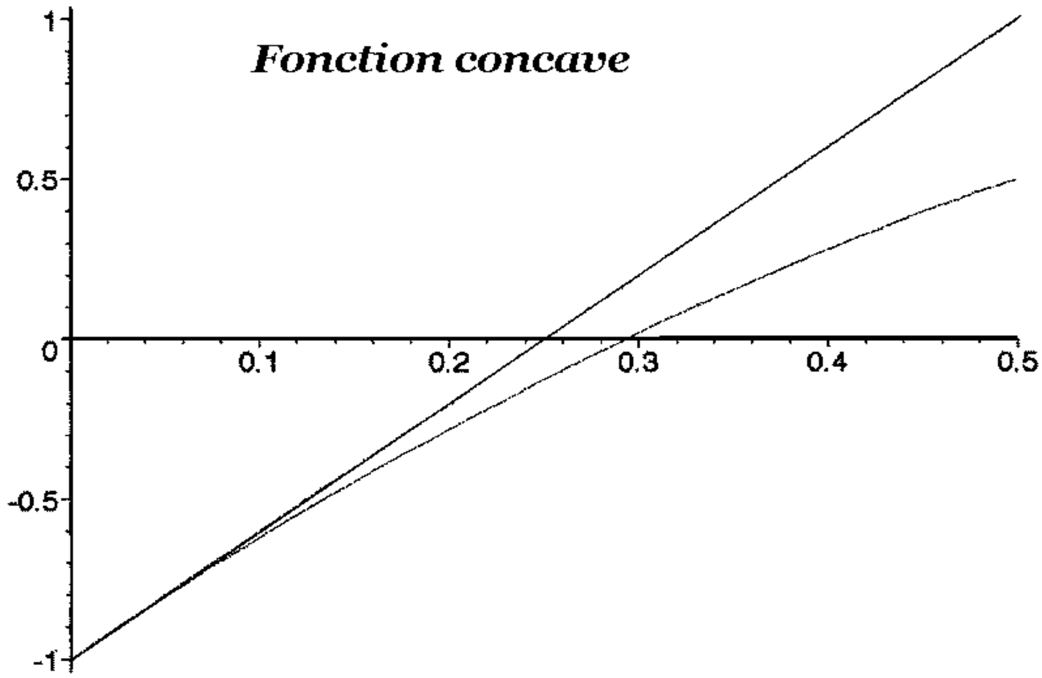
MATHEMATIQUES
Durée: 3h
L 'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Les deux problèmes sont entièrement indépendants.

PROBLEME I : Une méthode d'approximation de la racine d'une équation.

Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et f une application de classe $\mathcal{D}^2$ sur $[a, b]$, vérifiant $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$ et $f"(x) < 0$. On remarque que la situation générale est illustrée par la figure suivante :



On remarquera également que pour tout : $x \in [a, b]$, la tangente à la courbe de f au point de coordonnées $(x, f(x))$ est située au dessus de la courbe représentative de f
9. Montrer qu'il existe un seul $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(a) = 0$.
2. Soit x un élément de $[a, b]$.
2.a. Donner une équation de la tangenue à la courbe représentative de f au point $(x, f(x))$.
2.b. Montrer que cette droite coupe l'axe des abscisses au point de coofdonnées $(X, 0)$ avec $X = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
3. Pour tout x élément de $[a, b]$ on pose : $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
3.a. Vérifier que α est l'unique solution sur $[a, b]$ de l'équation: $g(x) = x$.
3.b. Montrer que tout élément de $[a, \alpha[$ a une image par g dans $[a, \alpha[$.
3.c. Montrer que g est de classe $\mathcal{S}^1$ sur $[a, b]$; déterminer le signe de $g'(x)$ pour x élément de $[a, \alpha[$. Calculer $g'(\alpha)$.
0. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite récurrente définie par :

$$x_9 \in [a, \alpha[, \ \forall n \geq 0, \ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

4.a. Montrer qu'on définit ainsi une suite d'éléments de $[a, \alpha[$.
4.b. Montrer qu'elle est monotone et convergente. Donner sa limite.
5. Dans cette question n est un entier naturel fixé et x désigne un élément de $[a, \alpha[$. On considère la fonction u définie sur $[x, \alpha]$ par la formule : $u(t) = f(t) - f(x) - (t-x)f'(x) - (t-x)^2\frac{A}{2}$ où A est l'unique réel tel que: $u(\alpha) = 0$.
5.a. En appliquant deux fois le théorème de Rolle à la fonction u sur $[x, \alpha]$, justifier l'existence d'un élément c_α de $]x, \alpha[$ tel que l'on ait : $f(x) + (\alpha - x)f'(x) = -\dfrac{(\alpha - x)^2}{2}f''(c_\alpha)$
5.b. On pose : $h_n = \alpha - x_n$. En utilisant la question précédente, justifier l'existence d'un réel θ_n, élément de $]0, 1[$, tel que : $h_{n+1} = -\dfrac{h_n^2}{2}\dfrac{f''(x_n + \theta_n h_n}{f'(x_n)}$,
5.c. En déduire qu'il existe une constante c strictement positive, indépendante de n, telle que :

$$|h_{n+1}| \leq \frac{c}{2}h_n^2$$

et montrer l'inégalité :

$$|h_{n+1}| \leq (b-a)^{2n+1}\frac{c}{2}^{2n+1} - 1$$

6. Application numérique : On reprend les notations des questions précédentes avec $a = 0$, $b = 1/2$, et $f(x) = 4x - 1 - 2x^2$. Vérifier qu'on peut bien appliquer les résultats des questions 1 à 4; déterminer c et le plus petit entier naturel N pour lequel la majoration du 5.c assure que X_N est une valeur approchée de $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ à 10^{-100} près.

PROBLEME II: Un problème de gestion de stock

Le gérant d'un kiosque à journaux vend, entre autres, le quotidien "Bidule". Chaque jour, le nombre de clients souhaitant acheter "Bidule" est représenté par une variable aléatoire X prenant des valeurs entières k vérifiant : $0 \leq k \leq N$ où N est un élément de N supposé supérieur ou égal à 2. Chaque exemplaire de "Bidule" vendu rapporte un bénéfice a ($a > 0$), chaque invendu représente une perte $-b$ ($b \geq 0$); de plus, le coût associé à chaque client potentiel qui ne peut être servi est estimé à $-c$ ($c \geq 0$). Enfin, pour tout entier naturel r, on note G_r la variable aléatoire égale au gain du gérant au cours d'une journée où il s'est procuré chez le grossiste r exemplaires de "Bidule", le calcul n'étant effectué que sur ce seul titre.
1. Dans cette question on suppose : $a = 1$; $b = 0,2$; $c = 0$; $N = 3$. On donne de plus : $P[X = 0] = 1/8$; $P[X = 1] = 1/2$; $P[X = 2] = 1/4$; $P[X = 3] = 1/8$.
l.a. Calculer les espérances des variables G_r, lorsque r varie entre 0 et 3.
l.b. Exprimer $E[G_r]$ en fonction de r, b et $E[G_3]$ pour tout r supérieur ou égal à 3 et justifier dans ce cas l'inégalité : $E[G_r] \leq E[G3]$
l.c. En déduire la valeur de r rendant $E[G_r]$ maximal.
2. On revient au cas général.
2.a. Déterminer $E[G_r]$ lorsque r est supérieur ou égal à N. Vérifier que dans ce cas on a toujours $E[G_r] \leq E[G_N]$.
2.b. Justifier, lorsque r est inférieur à N, l'égalité :

$$E[G_r] = -r(a+b+c)\sum_{k=0}^{r} P[X=k] + (a+b+c)\sum_{k=0}^{r} kP[X=k] + r(a+c) - cE[X]$$

3. On suppose désormais que X suit la loi uniforme et on a donc pour tout k vérifiant :

$$0 \leq k \leq N \ : \ P[X = k] = \frac{1}{N+1}$$

Expliciter $E[G_r]$ en fonction de a, b, c et r.
4. On considère l'application ϕ qui à tout : r réel associe :

$$\phi(x) = -\frac{x(x+1)}{N+1}.\frac{a+b+c}{2} + x(a+c) - c\frac{N}{2}$$

4.a. Montrer que ϕ admet un maximum en une valeur x_0, réelle, que l'on calculera en fonction de a, b, c et de N.
4.b. Montrer que x_0 est strictement positif si et seulement si : $\dfrac{a+c}{a+b+c} > \dfrac{1}{2(N+1)}$
On supposera désormais cette condition vérifiée.
4.c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que x_0 soit inférieur ou égal à N.
5. On note désormais r_0 une valeur de r rendant $E[G_r]$ maximal.
5.a. Justifier l'existence de r_0.
5.b. Application numérique nl: déterminer r_0 lorsque $N = 100$, $a = 5$, $b = 2$ et $c = 3$.
5.c. Application numérique n2: déterminer r_0 lorsque $N = 100$, $a = 2$, $b = 4$ et $c = 1$.