

## MATHEMATIQUES

Durée: 2 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Les deux problèmes sont totalement indépendants.

### PROBLEME I

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie  $n$ ,  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et  $\varphi$  une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :

- (i)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) \in E^3, \varphi(\lambda x + y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$
- (ii)  $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- (iii)  $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0, x \neq 0$  alors  $\varphi(x, x) > 0$

#### PARTIE A

A.1. Montrer que pour tout  $x$  élément de  $E$ , l'application  $\varphi_x$  définie par :

$$E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$z \longmapsto \varphi_x(z) = \varphi(x, z)$$

est linéaire.

A.2. Soit  $A = (a_{ij})_{i,j \in [1,n]}$  la matrice carrée de dimension  $n$  telle que  $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ , pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers compris entre 1 et  $n$ . Montrer que  $\varphi(x, y) = {}^t X \cdot A \cdot Y$  où  $X$  (resp.  $Y$ ) est la matrice colonne des coordonnées de  $x$  (resp.  $y$ ) dans la base  $B$ .

A.3.a. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, |\varphi(x, y)| \leq |\varphi(x, x)|^{1/2} \cdot |\varphi(y, y)|^{1/2}$$

*Indication* : On pourra considérer le polynôme en  $\lambda$ , défini par  $\varphi(x + \lambda y, x + \lambda y)$  et utiliser le fait qu'il est de signe constant.

A.3.b. En déduire que, pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments de  $E$  :

$$[\varphi(x + y, x + y)]^{1/2} \leq [\varphi(x, x)]^{1/2} + [\varphi(y, y)]^{1/2}$$

#### PARTIE B

On suppose maintenant que  $E = \mathbb{R}_3[X]$ , ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels et de degré au plus 3,  $B = \{1, X, X^2, X^3\}$  et :  $\forall (R, Q) \in E^2, \varphi(R, Q) = \int_0^1 R(t)Q(t)dt$

B.1. Montrer que  $\varphi$ , vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii) ci-dessus.

B.2. Déterminer la matrice  $A$  associée à  $\varphi$ , dans la base  $B$ .

B.3.a Montrer qu'il existe une unique famille  $(P_k)_{0 \leq k \leq 3}$  d'éléments de  $E$  vérifiant les trois conditions suivantes pour tout entier  $k$  ( $0 \leq k \leq 3$ ) :

$$(1) d^k P_k = k$$

(2) Le coefficient du terme de plus haut degré de  $P_k$  est égal à 1 .

$$(3) \forall i, (0 \leq i \leq k) \Rightarrow \varphi(P_i, P_k) = 0$$

Indication: on pourra déterminer explicitement et dans l'ordre  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$ .

B.3.b. Montrer que  $P_0, P_1, P_2, P_3$  est une base de  $E$ . En déduire que tout élément  $P$  de  $E$  s'écrit

de manière unique sous la forme :  $P = \sum_{k=0}^3 \lambda_k P_k$ , où  $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq 3}$  est une famille de réels.

B.3.c. Application numérique : déterminer explicitement  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  pour  $P = X^3 + X^2$ .

B.4. On désigne par  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $1, X$  et on note :

$$G = \{R \in E, \forall Q \in F, \varphi(R, Q) = 0\}$$

B.4.a. Montrer que  $P_0, P_1$  est une base de  $F$  et que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

B.4.b. Vérifier que  $R$ , élément de  $E$ , est un élément de  $G$  si et seulement si on a :  $\varphi(R, P_0) = 0$  et  $\varphi(R, P_1) = 0$ . En déduire que  $P_2, P_3$  est une base de  $G$ .

B.4.c. A l'aide des questions précédentes, établir que tout élément  $P$  de  $E$  s'écrit de manière unique :  $P = P_F + P_G$ , OU  $P_F$  est dans  $F$  et  $P_G$  est dans  $G$ . Vérifier que, pour tout élément  $R$  de  $F$ , on a la relation :  $\varphi(P_G, P_G) \leq \varphi(P - R, P - R)$ .

B.5. Application numérique : en utilisant les résultats précédents, déterminer les valeurs de  $a_0$  et  $b_0$  pour lesquelles on a :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \int_0^1 (t^3 + t^2 - a_0 t - b_0)^2 dt \leq \int_0^1 (t^3 + t^2 - at - b)^2 dt$

## PROBLEME II

Dans tout le problème on admettra que si  $(a_n)_{n \geq 0}$  est une suite réelle positive et bornée alors, on définit une application  $G$  qui est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$  en posant :  $G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . De plus,

pour tout entier  $k$  naturel non nul, on désignera par  $G^{(k)}$  la fonction dérivée d'ordre  $k$  de  $G$  et on aura, pour tout  $x \in ] -1, 1[$ , l'égalité :  $G^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}$ . On

considère une expérience aléatoire qui est une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes,  $A$  un événement lié à chacune des épreuves et dont la probabilité de réalisation est  $\alpha$ . Pour  $n \geq 0$  soit  $E_n$  l'événement "  $A$  n'est pas réalisé deux fois successivement lors des  $n$  premières épreuves " et appelons  $p_n$  sa probabilité de réalisation.

1.a. On pose  $p_0 = 1$  et  $p_1 = 1$ . Justifier brièvement ce choix.

1.b. Calculer  $p_2$  et  $p_3$ .

1.c. Soit  $B$  l'événement "  $A$  ne s'est pas réalisé lors de la première épreuve ". Montrer que :  $\forall n \geq 2, P[E_n | B] = p_n$ . Déterminer l'événement  $E_n \cap B$ . En déduire, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :  $p_n = (1 - \alpha)p_{n-1} + \alpha(1 - \alpha)p_{n-2}$ .

2. Pour tout  $x \in ] -l, 1[$  et  $n \geq 0$ , on pose  $F_n(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$  et  $F(x) = \sum_{k \geq 0} p_k x^k$ .

2.a. En utilisant la relation existant entre  $p_n, p_{n-1}$  et  $p_{n-2}$ , montrer que pour  $x \in ] -1, 1[$  et  $n \geq 2, F_n(x), F_{n-1}(x)$  et  $F_{n-2}(x)$  vérifient une relation que l'on déterminera.

2.b. En déduire que pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,  $F(x) = \frac{1 + \alpha x}{1 - (1 - \alpha)x - \alpha(1 - \alpha)x^2}$

2.3. Dans toute la suite du problème, on suppose que  $\alpha = 2/3$ .

3.a. Donner la décomposition en éléments simples de  $F$ .

3.b. Donner le développement limité à l'ordre  $n$  et au voisinage de 0 de  $F$ .

- 3.c. En utilisant la relation existant entre  $p_n$  et  $F^{(n)}$ , déduire la valeur de  $p_n$ , pour tout  $n$  entier naturel.
4. Soit  $X$  la variable aléatoire égale à  $n$  si et seulement si l'événement  $A$  est réalisé deux fois consécutivement pour la première fois lors des  $(n - 1)^{i\grave{e}me}$  et  $n^{i\grave{e}me}$  épreuves.
- 4.a. Calculer  $P[X = 2]$  et  $P[X = 3]$ .
- 4.b. Exprimer la probabilité de l'événement  $[X = n]$  en fonction de  $p_n$ , lorsque :  $n \geq 3$ .
- 4.c. Calculer l'espérance de  $X$  .