SCIENCES PHYSIQUES

Durée: 2 heures
L 'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

L'électrophorèse est une méthode de séparation d'ions en solution utilisant le fait qu'ils migrent avec des vitesses différentes dans un champ électrostatique; c'est une méthode de choix pour l'étude de molécules organiques comme les acides aminés ou les protéines qui s'ionisent lorsqu'elles sont placées à un pH convenable.

Les trois premières parties du problème sont indépendantes.

PARTIE I. *Etude du champ électrostatique entre deux plaques*

1.1. On considère une plaque infinie confondue avec le plan Oyz placée dans le vide et portant une densité de charge uniforme σ, (cf. figure 1 en annexe).
1.1.a. Déduire de l'analyse des symétries que le champ $\overrightarrow{E}$ créé par cette plaque est de la forme $\overrightarrow{E} = E(x)\overrightarrow{u}_x$ et que $E(-x) = -E(x)$.
1.1.b. En utilisant le théorème de Gauss pour un cylindre d'axe Ox et de section S, convenablement choisi, et qu'on représentera sur une figure, exprimer $E(x)$ en fonction de σ et de la permittivité du vide $\varepsilon 0$.
1.2. On considère deux plaques infinies confondues avec les plans $x = -l/2$ et $x = +l/2$, placées dans le vide et portant respectivement des densités de charge uniforme $+\sigma$ et $-\sigma$ (cf figure 2 en annexe).
1.2.a. Déterminer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé par l'ensemble des deux plaques dans le domaine $-l/2 < x < +l/2$.
1.2.b. On choisit un potentiel électrostatique tel que $V(x = 0) = V_0$. En déduire l'expression de $V(x)$ dans le domaine $-l/2 < x < +l/2$ en fonction de σ, ε_0, x et V_0.
1.2.c. En déduire l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ dans le domaine $-l/2 < x < +l/2$ en fonction de l et de la différence de potentiel $\Delta U = V_{-1/2} - V_{+1/2}$ entre les deux plaques.

PARTIE II. *Etude du phénomène d'électrophorèse.*

Le champ électrostatique dans une cuve à électrophorèse de longueur l, aux extrémités de laquelle on applique une différence de potentiel ΔU est de la forme : $\overrightarrow{E} = E(x)\overrightarrow{u}_x = \dfrac{\Delta U}{l}\overrightarrow{u}_x$ où $\overrightarrow{u}_x$ désigne le vecteur unitaire suivant l'axe $x'x$ (cf figure 3 en annexe). Un ion de masse m, de charge q, soumis à la force électrostatique due au champ $\overrightarrow{E}$, subit en outre une force de freinage $\overrightarrow{R} = -k\overrightarrow{\nu}$ proportionnelle à son vecteur-vitesse $\overrightarrow{\nu}$, avec $k > 0$.

2.1. Ecrire l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse de l'ion.
2.2. On constate qu'au bout d'une durée très brève, l'ion est en mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse limite $\nu_\infty \overrightarrow{u}_x$. Etablir l'expression de ν_∞ et montrer qu'on peut définir une mobilité électrophorétique ,$\mu = \frac{\nu_\infty}{E}$ caractéristique de l'ion; exprimer μ en fonction des constantes k et q.

PARTIE III. *Etude de la diffusion en l'absence de champ électrique*

A l'instant $t = 0$, on injecte avec une seringue une solution concentrée d'ions en $x = 0$: on admettra que cela revient à introduire N ions identiques dans la section de colonne d'abscisse

$x = 0$. On suppose que le nombre d'ions par unité de volume $n(x,t)$ est indépendant de y et z et que les ions diffusent à travers l'électrolyte en obéissant à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D constant; le vecteur densité de flux d'ions est alors de la forme : $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{u}_x$, avec $j = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$.

3.1. Exprimer le nombre dN d'ions présents à un instant t dans le volume (V) de la colonne compris entre x et $x+dx$, en fonction de $n(x,t)$, Σ et dx, où Σ est la surface de la section droite de la colonne.
3.2. Exprimer le nombre ∂N_x d'ions qui pénètrent dans (V) entre les instants t et $t+dt$ en traversant la section d'abscisse x. Même question pour le nombre ∂N_{x+dx} d'ions sortant de (V) en traversant la section d'abscisse $x+dx$.
3.3. Faire un bilan de matière pour l'élément de volume (V) entre les instants t et $t+dt$ et en déduire que $n(x,t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles : $D\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \dfrac{\partial n}{\partial x}$.
3.4. On admet que la fonction suivante est la solution convenable de l'équation précédente : $n(x,t) = \dfrac{N}{\Sigma}\dfrac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp(-\dfrac{x^2}{4Dt}$.
3.4.a. Tracer l'allure du graphe de $n(x,t)$ à un instant fixé. Comment appelle-t-on ce type de fonction ?
3.4.b. On définit une fonction $P(u)$ par : $P(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_u^{+\infty}\exp(-\xi^2/2)d\xi$, Montrer que le nombre $N(H,t)$ d'ions compris à l'instant t en dehors du domaine $-H/2 < 0 < +H/2$ vaut $N(H,t) = 2N.P(H/2\sqrt{2Dt})$.
3.4.c. A l'aide du tableau de valeurs ci-dessous, en déduire l'expression en fonction de D et t de la largeur H de la zone d'électrolyte centrée en $x = 0$, contenant à l'instant t, 95% des N ions de départ.

u	0	0.7	1.3	1.6	2	2.3
$P(u)$	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01

PARTIE IV. *Etude de la séparation des ions*

A l'instant initial $t = 0$, on injecte en $x = 0$ c'est-à-dire au milieu d'une colonne d'électrophorèse s'étendant entre $x = -l/2$ et $x = +l/2$, un mélange concentré de deux ions de mobilités électrophorétiques μ_1 et μ_2 différentes mais de même signe, et de même coefficient de diffusion D. On suppose que les phénomènes de déplacement électrophorétique et de diffusion sont indépendants l'un de l'autre : les ions d'une espèce se déplacent avec leur vitesse limite ν_∞ (cf. Partie II) et la zone qu'ils occupent s'élargit peu à peu par diffusion (cf. Partie III).

4.1. Exprimer en fonction de μ_1, μ_2, ΔU, l et t, la distance L séparant à l'instant t les deux populations d'ions initialement confondues en $x = 0$ si on ne tient pas compte de la diffusion.
4.2. La qualité de la séparation par électrophorèse est mesurée par le rapport $R = L/H$, où H désigne à l'instant t la largeur (déterminée en 3.4) des zones contenant respectivement 95% des ions A_1 et 95% des ions A_2. En pratique on exige d'avoir $R \geq 1$.
4.2.a. On donne, $\mu_1 = 1,0.10^{-7}m^2.V^{-1}.s^{-1}$, $\mu_2 = 0,95.10^{-7}m^2.V^{-1}.s^{-1}$, $D = 10^{-9}m^2.s^{-1}$, $\Delta U = 125V$ et $l = 0,25m$. A partir de quel instant τ obtient-on une bonne séparation?
4.2.b. Montrer que la valeur de τ obtenue n'est pas compatible avec la longueur de la colonne. Comment y remédier sans augmenter l'encombrement du dispositif ?
4.2.c. Qu'observe-t-on si $R \ll 1$?

ANNEXES

FIGURE 1

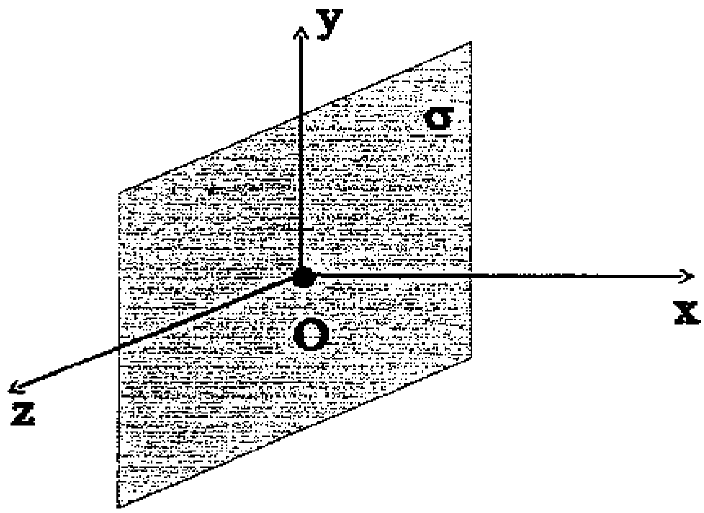

FIGURE 2

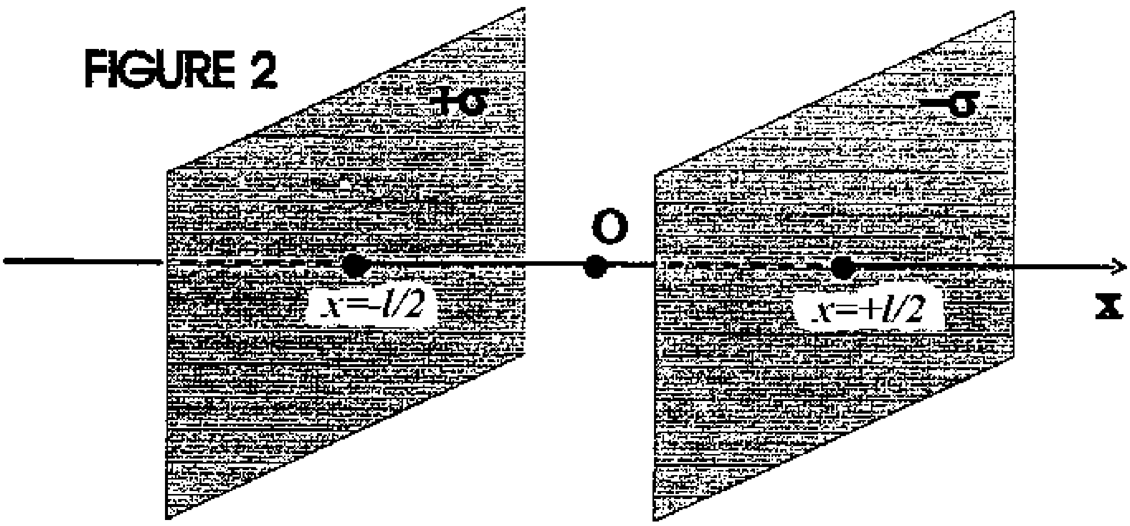

FIGURE 3