MATHEMATIQUES

Durée: 3h

L 'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

PARTIE I *Résultats préliminaires usuels.*

A. Dans toute cette partie, λ désigne un réel fixé non nul. On note g_λ la fonction définie, pour tout t réel par :

$$g_\lambda(t) = \exp(-\lambda t)$$

1. Vérifier la relation : $(g_\lambda)' + \lambda . g_\lambda = 0$

2.a. Démontrer que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme : $f = u \times g_\lambda$ où u est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

2.b. Montrer que la relation :(l) f est dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) + \lambda . f(t) = 0$

équivaut à la relation : (2) u est dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = 0$.

2.c. En déduire l'ensemble des fonctions f vérifiant la relation (l).

2.d. Montrer que, pour toute constante C fixée, il existe une seule fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant (l) et la condition : $f(0) = C$.

B. Dans cette partie λ et μ désignent deux réels non nuls (éventuellement confondus). On se propose de déterminer l'ensemble des couples (f_1, f_2) de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui vérifient, pour tout t réel les relations :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} f_1'(t) = -\lambda f_1(t) \\ f_2'(t) = \lambda f_1(t) - \mu f_2(t) \\ f_1(0) = 1 \end{array} \right.$$

1. Déterminer f_1 .

2.a. On pose: $f_2 = u \times g_\mu$.

Déterminer une relation sur u pour que (f_1, f_2) soit une solution de (3).

2.b. En déduire tous les couples solutions de (3) en distinguant suivant les cas où λ et μ sont distincts ou confondus.

C. Dans cette partie λ et μ désignent deux réels strictement positifs.

1. Dans cette question, on suppose λ et μ distincts. On considère l'unique solution de (3) telle que : $f_2(0) = 0$.

l.a. Expliciter $f_2(t)$, $f_2'(t)$ et $f_2"(t)$ pour tout t réel.

l.b. Donner le tableau de variation de f_2 sur $\mathbb{R}^+$. On précisera en particulier les abscisses du maximum et du point d'inflexion en fonction de λ et μ.

l.c. Application numérique: $\lambda = 0,7$; $\mu = 0,4$. Donner une représentation graphique de f_2 sur $\mathbb{R}^+$.

2. Dans cette question, on suppose $\lambda = \mu$. On considère l'unique solution de (3) telle que : $f_2(0) = 0$.

2.a. Expliciter $f_2(t)$, $f_2'(t)$ et $f_2"(t)$ pour tout t réel.

2.b. Donner le tableau de variation de f_2 sur $\mathbb{R}^+$. On précisera en particulier les abscisses du maximum et du point d'inflexion en fonction de λ et μ.

2.c. Application numérique: $\lambda = 0,5$. Donner une représentation graphique de f_2 sur $\mathbb{R}^+$.

PARTIE II ***Une famille de fonctions.***

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif. On se propose de montrer l'existence d'une unique famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout t réel:

$$(4)\left\{\begin{array}{l} f_1'(t) = -\lambda f_1(t) \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \left\{\begin{array}{l} f_{n+1}'(t) = \lambda f_n(t) - \lambda f_{n+1}(t) \\ f_n(0) = 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1. Déterminer f_1 et f_2.
2. Montrer par récurrence sur n que f_n est donnée, pour tout t réel par une expression de la forme :

$$f_n(t) = P_n(t) \times \exp(-\lambda t)$$

où P_n est une fonction polynômiale dont on déterminera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.
3. Calculer P_1 P_2 et P_3.
4. Justifier en utilisant la question 2., que l'on a, pour tout n entier naturel non nul et tout t réel, la relation:

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

5.a. n désigne dans cette question un entier non nul fixé. Déterminer un équivalent lorsque t tend vers $+\infty$ de $f_n(t)$ ainsi que sa limite.
5.b. Déterminer, pour t fixé, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $f_n(t)$.
6. Pour tout n entier naturel non nul et tout t réel, on pose: $\varphi_n(t) = -(f_{n+1})'(t)$.
6.a. Exprimer $\varphi_n(t)$ en fonction de λ, n et t.
6.b. Démontrer : $\displaystyle\lim_{T\to\infty} \int_0^T \varphi_n(t)dt = 1$.
6.c. En déduire en fonction de λ une expression de : $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t)dt$.

PARTIE III ***Des variables aléatoires à densité.***

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On note X_n la variable aléatoire réelle continue dont une densité de probabilité h_n est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\ t \in \mathbb{R}^+ \ ,\ h_n(t) = -\alpha f_n(t) \\ \forall\ t \in \mathbb{R}^{*-} \ ,\ h_n(t) = 0 \end{array}\right.$$

1. Reconnaître la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.
2. On suppose désormais que n est strictement supérieur à 1.
2.a. Calculer α_n.
2.b. Déterminer l'espérance de X_n en fonction de α_n et de n.
3.a. Justifier, pour tout $p (1 \leqslant p \leqslant n)$ la relation : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$
3.b. En déduire l'espérance de X_n^2, puis, plus généralement, celle de X_n^p, pour p entier naturel non nul.