Concours ENSI 1988 DEUG

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures - Sujet de remplacement)

NOTATIONS ET DEFINITIONS GENERALES :

On désigne par :
$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls
$\mathbb{R}^{+*}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs
I l'intervalle réel $[0;+\infty[$
E l'ennemble des fonctions de la variable réelle t définies et continues pour tout t de I
$\mathbb{N}$ l'ennemble des entiers positifs ou nuls
$\mathbb{N}^*$

Soit G l'image de g lorsque $s >$. Montrer que F est indéfiniment dérivable et que pour tout $s >$: $G(s) = (-1)^m \dfrac{d^m F(s)}{ds^m}$.
Plus particulièrement, déterminer l'image de t^m lorsqu'elle existe.

II. On suppose de plus que f est n fois dérivable ($n \in \mathbb{N}^*$) sur I et que les n dérivées successives notées $f^{(1)}$ ou f', $f^{(2)}$ ou f'',$f^{(3)}; : : : ; f^{(n)}$ appartiennent à E^* avec $f^{(k)}(t) = 0(e^{\beta t})$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n^*$.

On désigne respectivement par F et $F^{(n)}$ les images des fonctions f et $f_{(n)}$ lorsque $s >$.

1) Montrer que : $F_{(n)}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \displaystyle\sum_{p=2}^{n} s^{n-p} f^{(p-1)}(0)$. En déduire que $sF(s)$ tend vers une limite que l'on déterminera lorsque s tend vers $+\infty$.

2) Déterminer les images des fonctions $tf'(t)$ et $tf''(t)$ en précisant les domaines d'existence, en s.

PARTIE III

Remarque préliminaire : Si f_1 et f_2 sont deux éléments de E^* possédant lorsque $s > s_0$ la même image F, on admettra, sans le démontrer que : $f_1(t) = f_2(t)$ pour tout t de I.
On considère l'équation différentielle (E) :

$$ty_n''(t) + (1-t)y_n'(t) + ny_n(t) = 0 \ ; \ t > 0; n \in \mathbb{N} :$$

On admettra que (E) admet pour chaque valeur de n entière une seule solution y_n telle que :

$$(C) \quad \lim_{t \to 0^+} y_n(t) = (-1)^n$$

I. Montrer que la solution de (E) satisfaisant la condition (C) est un polynôme p_n de degré n.

II. Montrer que la fonction h définie par : $h(t) = tp_n''(t) + (1-t)p_n'(t) + np_n(t)$ est sommable pour tout $s > 0$.

Soit Π_n l'image de p_n lorsque $s > 0$. Etablir que Π_n satisfait une équation différentielle à variables séparables dont la solution, compte tenu de la condition (C) est : $\Pi_n(s) = \dfrac{(1-s)^n}{s^{n+1}}$. En déduire les expressions de $p_0; p_1; p_2; p_3$ et p_n $(n \in \mathbb{N})$, en fonction de t.

III. 1) La valeur de n étant fixée, on définit les intégrales :

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} p_n(t) dt$$
$$I_k = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k p_n(t) dt \ (k \in \mathbb{N}_n^*) :$$

Après avoir montré l'existence de ces intégrales, déterminer leur expression.

2) Soit m et n deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Déduire des intégrales précédentes que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} p_n(t) P_m(t) dt = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \\ 1 \text{ si } m = n \end{cases}$$

3) On rappelle que si un élément f de E est tel que :

(i) $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in I$

(ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = 0$ alors $f(t) = 0$ pour tout t de I.

Le cas $n = 1$ étant trivial, on se propose de démontrer, dans l'hypothèse $n \geq 2$, que p_n possède n racines réelles distinctes sur I. Pour cela, établir que p_n :

- Ne peut avoir de racines réelles négatives.
- Ne peut avoir deux racines complexes conjuguées.
- Ne peut avoir de racines doubles.

PARTIE IV

On désigne par $_i$ ($i \in \mathbb{N}_n^*$) les n racines de p_n ($_1 > {}_2 > \cdots > {}_n$), n étant fixé ($n \geq 2$). On pose $p_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ et l'on désigne par p'_n et p''_n les polynômes dérivés. Soit enfin $t_0 > {}_1$.

I. Démontrer que :

1) $p_n(t_0) > 0$

2) p'_n possède $(n-1)$ racines réelles distinctes $'_j$ ($j \in \mathbb{N}_{n-1}^*$) sur I telles que : $_1 > {}'_1 > {}_2 > {}'_2 > \cdots > {}'_{n-1}\ {}_n$.

En déduire que : $\forall\, t > {}'_1 \begin{cases} p'_n(t) > 0 \\ p''_n(t) > 0 \end{cases}$.

II. On considère la suite récurrente (t_k) :

$$\begin{aligned} & t_0 > {}_1 \\ & t_{k+1} = t_k - \frac{p_n(t_k)}{p'_n(t_k)} \quad (k \in \mathbb{N}^*) : \end{aligned}$$

A l'aide d'un raisonnement par récurrence et en utilisant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, montrer que (t_k) est minorée par $_1$.

En déduire que (t_k) est une suite strictement décroissante qui converge vers une limite que l'on précisera lorsque $k \to +\infty$.

III. Application numérique. On considère l'équation algébrique $p_3(t) = 0$.

1) Déterminer à l'aide de la méthode décrite précédemment une valeur approchée t_p de $_1$ telle que $t_{p-1} - t_p \leq 10^{-4}$.

2) Même question pour $_3$. En déduire une valeur approchée de $_2$.

——— $\mathcal{FIN}$ ———