Concours ENSAM - ESTP - ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1

durée 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

Dans tout le problème, a et b désignent deux réels positifs tels que : $0 < a < b$.

Préliminaire.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ qui à $x \in \mathbf{R}$ associe
$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On admettra dans tout le problème que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie 1.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction u_n de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall\, x > 0\ ,\ u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Question 1.

1.1. Vérifier que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x > 0, u_n(x) \geqslant 0$.

1.2. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans toute la suite du problème, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est notée S et γ désigne la valeur de $S(1)$.

Question 2.

2.1. Prouver que S est dérivable sur $[a,b]$.

2.2. En déduire que S est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall\, x > 0\ ,\ \frac{dS}{dx}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

Tournez la page S.V.P.

Question 3.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer que lorsque p tend vers l'infini : $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} = \ln p + \gamma + o(1)$.

Question 4.

4.1. Prouver que :

$$\sum_{n=1}^{p} (u_n(x+1) - u_n(x)) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} + \ln(1+x) - \ln(p+1+x).$$

4.2. En déduire que :

$$\forall\, x > 0 \ , \ S(x+1) = S(x) + \gamma + \ln(1+x).$$

Question 5.

Soit φ la fonction définie de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall\, x > 0 \ , \ \varphi(x) = \frac{1}{x} \exp(-\gamma x + S(x)).$$

5.1. Montrer que $\forall x > 0, \varphi(x+1) = x\varphi(x)$.

5.2. Vérifier que φ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Calculer $\frac{d\varphi}{dx}(x)$ pour $x > 0$. Que vaut $\frac{d\varphi}{dx}(1)$?

Question 6.

Pour $n \geqslant 1$, soit φ_n la fonction de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall\, x > 0 \ , \ \varphi_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1) \ldots (x+n)}.$$

Montrer que $\forall\, x > 0$, $\ln(\varphi_n(x))$ tend vers $S(x) - x\gamma - \ln x$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 7.

On note $\pi_p = \prod_{n=1}^{p} \frac{\exp\left(\frac{x}{n}\right)}{1 + \frac{x}{n}}$ (p entier naturel > 0).

7.1. Prouver la convergence de la suite $(\pi_p)_{p \geqslant 1}$ vers une limite $L(x)$.

7.2. En déduire que : $\forall\, x > 0 \ , \ \varphi(x) = \frac{L(x)}{x} \exp(-x\gamma)$.

Partie 2.

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t)\, dt$.

Question 1.

1.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

1.2. Calculer $\Gamma(1)$.

1.3. Montrer que $\forall x > 0\ ,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Question 2.

Pour n entier naturel $\geqslant 1$, on définit la fonction g_n de de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$t \to \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant t < n, \\ 0 & \text{si } t \geqslant n \end{cases}$$

2.1. Prouver que : $\forall\ t \geqslant 0\ ,\ \exp(-t) \geqslant 1 - t$.

En déduire que : $\forall\ t \geqslant 0\ , \forall\ n \geqslant 1\ ,\ 0 \leqslant g_n(t) \leqslant \exp(-t)$.

2.2. Montrer alors que :

$$\forall\ x > 0\ ,\ \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \Gamma(x).$$

Question 3.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on définit la fonction I_n de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\ dt.$$

3.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction I_n.

3.2. Prouver que :

$$\forall\ x > 0\ , \forall\ n \geqslant 1\ ,\ \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ dt = n^x I_n(x).$$

3.3. Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$ et en déduire que :

$$\forall\ x > 0\ ,\ \Gamma(x) = \varphi(x).$$

Partie 3.

Dans toute cette partie, $x \in \,]0,1[$.

Question 1.

Vérifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \exp(-t)\ln^2 t\,dt$.

Question 2.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On définit les fonctions :

v_n de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par : $\forall\ t > 0\ ,\ v_n(t) = \frac{x^n}{n!}\exp(-t)(\ln t)^n$

et T_n de $]1,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$ par : $\forall\ u > 1\ ,\ T_n(u) = \int_{1/u}^{u} v_n(t)\,dt$.

2.1. Pour $u > 1$ donné, montrer que la série de fonctions de terme général v_n converge normalement sur $\left[\frac{1}{u}, u\right]$.

2.2. Justifier que : $\forall\ u > 1\ ,\ \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(u) = \int_{1/u}^{u} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t) \right) dt.$

Question 3.

On pose, pour $n \in \mathbf{N}$:

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \int_0^1 \exp(-t)\,|\ln t|^n\,dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{x^n}{n!} \int_1^{+\infty} \exp(-t)\,(\ln t)^n\,dt.$$

3.1. Montrer que :

$$\forall\ p \geqslant 0\ ,\ \sum_{n=0}^{p} (a_n + b_n) \leqslant \int_0^{+\infty} \exp(-t + x|\ln t|)\,dt.$$

3.2. En déduire que la série de fonctions de terme général T_n converge normalement sur $]1,+\infty[$.

Question 4.

4.1. Vérifier que $\forall x \in\ ]0,1[\ ,\ \Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \exp(-t)(\ln t)^n \right) dt.$

4.2. Prouver alors que :

$$\forall x \in\ ]0,1[\ ,\ \Gamma(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-t)(\ln t)^n\,dt \right).$$

Question 5.

5.1. A l'aide des parties 1 et 2, vérifier que :

$$\frac{\frac{d\Gamma}{dx}(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

puis que $$\frac{\frac{d\Gamma}{dx}(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k \right).$$

5.2. En admettant que l'on peut intervertir dans la formule précédente les deux sommations, prouver que :

$$\forall x \in\ ]0,1[\ ,\ \Gamma(1+x) = \exp\left(-\gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k) \right).$$

5.3. Démontrer alors le résultat : $\int_0^{+\infty} \exp(-t) \ln^2 t\,dt = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.$