ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière PC

(**Durée de l'épreuve** : **3 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière PC.
Cet énoncé comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit F la somme de la série entière réelle de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^{2n}}{(n!)^2}, n = 0, 1, 2, ...;$$

cette fonction F est définie par la relation suivante :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

Le but de ce problème est de rechercher une fonction équivalente à la fonction F à l'infini.

Première partie

I.1 Définition de la fonction F :

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F. Étudier les variations de la fonction F et la convexité de son graphe.

I.2 Encadrement de la fonction F :

Soient $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ les suites réelles définies par les relations suivantes :

$$v_n = \frac{(n!)^2}{\left(2\,n\right)!}4^n\ ;\quad w_n = \frac{(n!)^2}{\left(2\,n+1\right)!}4^n\ ;\ n = 0,1,2,\ldots,\ (0! = 1).$$

a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone croissante. En déduire l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{4^n}{\left(2\,n\right)!}\ ;\ n = 0,1,2,\ldots.$$

En déduire une majoration, sur la demi-droite fermée $\left[0,\ \infty\right[$, de la fonction F à l'aide de la fonction $x \mapsto ch(2x)$.

b. Démontrer de même une minoration, sur la demi-droite ouverte $\left]0,\ \infty\right[$, de la fonction F à l'aide de la fonction $x \mapsto sh(2x)/2x$.

Pour tout réel x strictement positif, soit $G(x)$ la moyenne géométrique des réels $ch(2x)$ et $sh(2x)/2x$. Soit Φ la fonction définie, sur la demi-droite ouverte $\left]0,\ \infty\right[$, par la relation suivante :

$$\Phi(x) = \frac{e^{2\,x}}{\sqrt{x}}.$$

c. Comparer les deux fonctions G et Φ à l'infini.

Deuxième partie

Dans la suite il sera utile de considérer la transformation L suivante (dite de Laplace). À une fonction f donnée $t \mapsto f(t)$, définie et continue sur la demi-droite ouverte $\left]0,\ \infty\right[$, intégrable sur tout intervalle semi-ouvert $\left]0,\ a\right]$, (a est un réel positif quelconque), la transformation L associe la fonction $L(f)$ qui, si elle existe, est définie par la relation suivante :

$$L(f)(x) = \int_0^{\infty} f(t)\ e^{-x\,t}\ dt.$$

II-1. Exemples : transformées de Laplace des fonctions F **et** Φ :

a. Un résultat préliminaire : soit x un réel strictement positif donné $(x > 0)$; calculer pour tout entier naturel k ($k \in \mathbf{N}$), l'intégrale I_k suivante :

$$I_k = \int_0^{\infty} t^k\ e^{-x\,t}\ dt.$$

b. Démontrer que la fonction $t \mapsto F(t)\ e^{-x\,t}$ est intégrable sur la demi-droite fermée $\left[0,\ \infty\right[$ dès que le réel x est strictement supérieur à 2 $(x > 2)$. Déterminer la fonction $L(F)$ en calculant $L(F)(x)$ au moyen de la somme d'une série.

$$L(F)(x) = \int_0^{\infty} F(t)\ e^{-x\,t}dt.$$

c. Soit g la somme d'une série entière définie par la relation suivante :

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, t^{2n}.$$

Déterminer l'intervalle ouvert $\left]-R,\ R\right[$ de définition de la fonction g. Déterminer au moyen de fonctions élémentaires l'expression de $g(t)$ en utilisant par exemple le développement en série entière de la fonction

$$u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u}}.$$

d. En déduire l'expression, pour tout réel x supérieur strictement à 2, de la transformée de Laplace de la fonction F.

e. Déterminer, en précisant son ensemble de définition, la transformée de Laplace de la fonction Φ, définie pour $t > 0$ par la relation suivante :

$$\Phi(t) = \frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}.$$

Le résultat ci-contre est admis : $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

II-2. **Une propriété de la transformation de Laplace** :

Étant donnée une fonction f définie et continue sur la demi-droite ouverte $\left]0,\ \infty\right[$, intégrable sur tout intervalle semi-ouvert $\left]0,\ a\right]$, (a est un réel positif quelconque), soit $I(f)$ l'ensemble des réels x pour lesquels la fonction $t \mapsto f(t)\, e^{-x\,t}$ est intégrable sur la demi-droite ouverte $\left]0,\ \infty\right[$:

$$I(f) = \left\{x \mid t \mapsto f(t)\, e^{-x\,t} \text{ est intégrable sur } \left]0,\ \infty\right[\right\}.$$

a. Démontrer que si le réel x_0 appartient à l'ensemble $I(f)$, alors la demi-droite fermée $\left[x_0,\ \infty\right[$ est contenue dans $I(f)$.

Soit E l'ensemble des fonctions f, considérées ci-dessus, dont l'ensemble $I(f)$ n'est ni vide ni égal à toute la droite réelle $\left(I(f) \neq \emptyset \text{ et } I(f) \neq \mathbf{R}\right)$.

b. Démontrer que, pour toute fonction f appartenant à l'ensemble E, l'ensemble $I(f)$ admet une borne inférieure $\alpha(f)$:

$$\alpha(f) = \inf\{x \mid x \in I(f)\}.$$

En déduire que l'ensemble $I(f)$ est la demi-droite ouverte $\left]\alpha(f),\ \infty\right[$ ou la demi-droite fermée $\left[\alpha(f),\ \infty\right[$.

c. Démontrer que, pour toute fonction f appartenant à E, la fonction $x \mapsto L(f)(x)$ est continue sur la demi-droite ouverte $\left]\alpha(f),\ \infty\right[$.

Démontrer que, si la fonction f est positive, la fonction $L(f)$ est décroissante ; en déduire que, si $\alpha(f)$ appartient à $I(f)$, la fonction $L(f)$ est bornée sur la demi-droite fermée $\left[\alpha(f),\ \infty\right[$.

d. Soit g une fonction positive appartenant à l'ensemble E, dont la transformée de Laplace $L(g)$ est bornée sur la demi-droite ouverte $\left]\alpha(g),\ \infty\right[$. Démontrer les propriétés suivantes :

i/ il existe une constante positive M, telle que, pour tout réel x strictement supérieur à $\alpha(g)$ $(x > \alpha(g))$ et tout réel positif A :

$$\int_0^A g(t)\ e^{-x\,t}dt \leq M.$$

ii/ En déduire que la transformée de Laplace de la fonction g est définie sur la demi-droite fermée $\left[\alpha(g),\ \infty\right[$.

II-3. **Comparaison des transformées de Laplace de deux fonctions équivalentes** :

Soient g et h deux fonctions, positives, appartenant à l'espace E. Ces deux fonctions sont supposées croître vers l'infini lorsque le réel t tend vers l'infini et être équivalentes à l'infini $(g \simeq h)$.

a. Démontrer que les deux réels $\alpha(g)$ et $\alpha(h)$ sont égaux.

b. Ici $\alpha(h)$ n'appartient pas à $I(h)$. Quelle conclusion y-a-t-il lieu d'en tirer sur $L(h)(x)$ lorsque le réel x tend vers $\alpha(h)$ (par valeurs supérieures) ? Démontrer que, pour tout réel positif ε, il existe un réel A tel que, pour t supérieur à A, il vienne l'inégalité :

$$|g(t) - h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|h(t)|.$$

En déduire l'inégalité ci-dessous, pour tout réel x appartenant à la demi-droite ouverte $]\alpha(h),\infty[$,

$$|L(g)(x) - L(h)(x)| \leq \int_0^A |g(t) - h(t)|\ e^{-x\,t}\ dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_A^\infty |h(t)|\ e^{-x\,t}\ dt.$$

Démontrer que les deux fonctions $L(g) - L(h)$ sont équivalentes lorsque le réel x tend vers $\alpha(h)$.

II-4. **Une conjecture** :

Comparer les transformées de Laplace des fonctions F et Φ. Est-il possible de proposer un équivalent à la fonction F à l'infini ?

Troisième partie

Le but de cette partie est d'établir le résultat suggéré par la question II-4.

III-1. **Fonction k** :

Dans cette question, x est un réel fixé strictement positif. Soit $k : t \mapsto k(t)$ la fonction définie par la relation suivante :

$$k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ e^{i\,n\,t}.$$

a. Démontrer que, pour tout réel x fixé, la fonction $k : t \mapsto k(t)$ est définie et continue sur la droite réelle **R**, périodique et de période 2π.

En déduire la valeur de l'intégrale J ci-dessous au moyen du réel $F(x)$.

$$J = \int_0^{2\pi} |k(t)|^2 dt.$$

b. Calculer $k(t)$. En déduire une expression de $|k(t)|^2$.

c. En déduire l'expression de $F(x)$ au moyen de l'intégrale $\int_0^{\pi} \exp\big(2\,x\ \cos t\big)\ dt$.

III-2. Trois fonctions auxiliaires :
Étant donné un réel x strictement positif, soient h_1, h_2 et h_3 les trois fonctions suivantes :

$$h_1(x) = \int_0^{\pi/2} \exp\big(x\ \cos t\big)\ dt \quad ; \quad h_2(x) = \int_0^1 \frac{\exp\big(x\,t\big)}{\sqrt{1-t}}\ dt \quad ;$$
$$h_3(x) = \int_0^1 \exp\big(x\,t\big)\ \sqrt{1-t}\ dt.$$

a. Justifier l'existence de ces trois intégrales.

b. En effectuant d'abord le changement de variable $u = \sqrt{1-t}$ dans l'intégrale servant à calculer $h_2(x)$, déterminer un équivalent de $h_2(x)$ lorsque le réel x tend vers l'infini.

c. Déterminer de même un équivalent de $h_3(x)$ lorsque le réel x tend vers l'infini.

Le résultat ci-contre est admis : $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-u}\ \sqrt{u}\ du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

d. Établir la propriété suivante : il existe une constante C telle que, pour tout réel u de l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$, la relation ci-dessous soit vraie :

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-u)}} \right| \leq C\sqrt{1-u}\,.$$

e. Déduire des résultats précédents un équivalent de $h_1(x)$ à l'infini.

III-3 Équivalent de la fonction *F* à l'infini :
Déduire des résultats précédents un équivalent de la fonction F à l'infini.

FIN DU PROBLÈME