

Concours CCP 2002 PC

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

Les calculatrices sont interdites

*N. B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. **La partie IV peut être traitée indépendamment des autres.***

PARTIE I

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la fonction polynôme de la variable réelle x définie par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

I.1- Donner une expression explicite des fonctions polynômes P_0 , P_1 , P_2 et P_3 .

I.2- Exprimer $P_n(-x)$ en fonction de $P_n(x)$.

I.3- Calculer $P_n(0)$ et $P'_n(0)$.

I.4- En effectuant de deux façons différentes le calcul de $\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} [(x^2 - 1)^{n+1}]$ montrer que l'on a

$$(1 - x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

I.5- Soit k un nombre entier compris au sens large entre 0 et $n-1$. Préciser l'ordre de multiplicité de $+1$ et -1 en tant que racines de la dérivée d'ordre k de $(x^2 - 1)^n$.

En appliquant le théorème de Rolle aux dérivées successives de $(x^2 - 1)^n$, montrer que P_n admet n racines réelles distinctes, toutes comprises strictement entre -1 et $+1$.

PARTIE II

Soit f la fonction de deux variables réelles x et y définie par : $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xy + x^2}}$.

II.1- Représenter graphiquement l'ensemble \mathcal{D}_f des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en lesquels $f(x, y)$ est définie.

Soit \mathcal{E} l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $2|x| \cdot |y| + |x|^2 < 1$.

On admettra que l'on a sur \mathcal{E} un développement en série de f de la forme

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(y)x^n \quad (E)$$

où les fonctions A_n sont de classe \mathcal{C}^∞ , et que les dérivées partielles de f à tous les ordres, par rapport à l'ensemble des deux variables x et y , peuvent se calculer en dérivant terme à terme le deuxième membre de l'égalité (E).

II.2- Représenter graphiquement l'ensemble \mathcal{E} .

II.3- Calculer $A_n(0)$ et $A'_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.4-

II.4.1- Calculer $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (x - y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

En déduire que l'on a $yA'_0(y) = 0$, et pour tout $n \geq 1$, $yA'_n(y) - A'_{n-1}(y) = nA_n(y)$.

II.4.2- Calculer $(1 - 2xy + x^2) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (x - y)f(x, y)$. En déduire que l'on a $A_1(y) - yA_0(y) = 0$, et pour tout $n \geq 2$: $nA_n(y) - (2n - 1)yA_{n-1}(y) + (n - 1)A_{n-2}(y) = 0$.

II.4.3- En dérivant les relations obtenues à la question précédente, montrer que l'on a, pour tout $n \geq 1$, la relation $A'_n(y) - yA'_{n-1}(y) = nA_{n-1}(y)$.

II.4.4- Déduire de ce qui précède que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1 - y^2)A''_n(y) - 2yA'_n(y) + n(n + 1)A_n(y) = 0.$$

Exprimer $A_n(y)$ en fonction de $P_n(y)$ pour tout $y \in]-1, +1[$.

PARTIE III

On considère les fonctions F , C et S des deux variables réelles x et θ définies pour $|x| < 1$ et θ quelconque par : $F(x, \theta) = \frac{1}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$, $C(x, \theta) = \frac{1 - x \cos \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$, $S(x, \theta) = \frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$.

III.1- Pour x fixé tel que $|x| < 1$, déterminer les développements en séries de Fourier $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x) \cos n\theta$ de $C(x, \theta)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x) \sin n\theta$ de $S(x, \theta)$ considérées comme fonctions de la variable θ . On montrera que $C(x, \theta) + iS(x, \theta) = \frac{1}{1 - xe^{i\theta}}$

A-t-on les égalités $C(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x) \cos n\theta$ et $S(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x) \sin n\theta$ pour tout couple (x, θ) appartenant à $]1, +1[\times \mathbb{R}$?

III.2- Déduire de la question précédente le développement en série de Fourier $F(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \cos n\theta$ de $F(x, \theta)$ considérée comme fonction de la variable θ , ainsi que le développement en série entière $F(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(\theta)x^n$ de $F(x, \theta)$ considérée comme fonction de la variable x .

III.3- Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\sum_{k=0}^n P_k(\cos \theta)P_{n-k}(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$, cette dernière fonction de θ étant supposée prolongée par continuité lorsque θ est multiple entier de π .

PARTIE IV

Soit λ un nombre réel non entier relatif. On considère l'équation différentielle linéaire en la fonction inconnue z de la variable réelle x , à valeurs réelles : $(L_\lambda) (1 - x^2)z''(x) - 2xz'(x) + \lambda(\lambda + 1)z(x) = 0$. On se propose de déterminer les solutions de (L_λ) développables en série entière au voisinage de 0.

IV.1- Soit $z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul. Déterminer la relation qui doit lier α_{n+2} et α_n pour que z soit solution de (L_λ) .

IV.2- En déduire l'expression de α_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV.3- Quel est le rayon de convergence des séries entières ainsi obtenues?