

## Concours CCP 2002 PC

### PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

**Les calculatrices sont interdites**

*N. B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

### Notations

Soit  $n$  et  $p$  des entiers supérieurs ou égaux à 1.  $\mathbb{K}$  désignant le corps des réels ou celui des complexes, on note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices à coefficients dans  $\mathbb{K}$  ayant  $n$  lignes et  $p$  colonnes. Lorsque  $p = n$ ,  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$  est noté plus simplement  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et est muni de sa structure d'algèbre,  $I_n$  représentant la matrice identité.

$0_{n,p}$  désigne la matrice nulle de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $0_n$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$GL_n(\mathbb{K})$  désigne l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  triangulaires supérieures à éléments dans  $\mathbb{K}$ .

Tout vecteur  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbb{K}^n$  est identifié à un élément  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  tel que l'élément de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $X$  soit  $x_i$ . Dans toute la suite, nous noterons indifféremment  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  aussi bien que le vecteur de  $\mathbb{K}^n$  qui lui est associé.

Pour  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq p}$  dans  $\mathbb{K}^p$ , on note  $(AX)_i$  le coefficient de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $AX$ .

Pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $Sp(A)$  l'ensemble des valeurs propres complexes de  $A$  et on appelle rayon spectral de  $A$  le réel  $\rho(A)$  défini par :  $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$ .

Conformément à l'usage, on note  $N_\infty$ , la norme définie sur  $\mathbb{C}^n$  par :

$$\forall X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n, N_\infty(X) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

On qualifie de norme matricielle toute norme  $\varphi$  définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  vérifiant la propriété :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \varphi(AB) \leq \varphi(A) \cdot \varphi(B).$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  étant de dimension finie, on rappelle qu'une suite de matrices  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  converge vers une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  si et seulement si la convergence a lieu dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  muni d'une norme quelconque.

### Partie I

Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite trigonalisable si et seulement si il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  et  $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$  tels que  $T = P^{-1}AP$ .

I.1- Pour  $n$  fixé, on suppose que toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable et on considère une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$

a) Montrer que  $M$  admet au moins une valeur propre.

b) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M$ . Montrer qu'il existe  $Q \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$ ,  $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$  et  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

tels que :  $Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0_{n,1} & N \end{pmatrix}$

c) En déduire qu'il existe  $H \in GL_n(\mathbb{C})$  et  $S \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$  tels que :  $Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0_{n,1} & HSH^{-1} \end{pmatrix}$ .

- d) On pose  $R = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & H \end{pmatrix}$ . Montrer que  $R$  est inversible et exprimer  $R^{-1}$ .
- e) Calculer  $R^{-1}Q^{-1}MQR$  et en déduire que  $M$  est trigonalisable.

I.2- Déduire de la question précédente que pour tout  $n$  entier supérieur ou égal à 1, toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.

I.3- Soit la matrice  $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ .

- a) La matrice  $G$  est-elle diagonalisable ?
- b) On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^3$ . Montrer que  $G$  admet un unique vecteur propre  $u$  dont la première composante dans la base  $\mathcal{B}$  est égale à 1 et vérifier que  $\mathcal{B}_1 = (u, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{C}^3$ .
- c) On note  $Q$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}_1$ . Calculer  $Q^{-1}GQ$  et en déduire, en s'inspirant de la méthode décrite aux questions I.1 et I.2,  $P \in GL_3(\mathbb{C})$  et  $T \in \mathcal{T}_3(\mathbb{C})$  telles que  $P^{-1}GP = T$ .

I.4- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Si  $T$  est une matrice triangulaire supérieure semblable à  $A$ , que représentent les éléments diagonaux de  $T$  ?

I.5- Soit  $S = (s_{ij})$  et  $T = (t_{ij})$  deux matrices triangulaires supérieures de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

- a) Montrer que  $ST$  est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont  $s_{11}t_{11}, s_{22}t_{22}, \dots, s_{nn}t_{nn}$ .
- b) Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , quels sont les éléments diagonaux de  $T^k$  ?

I.6- Montrer que pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$   $\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$ .

I.7- Montrer que l'application  $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A = (a_{ij}) \rightarrow \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , mais n'est pas en général une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

I.8- En admettant l'existence de normes matricielles sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (la suite du problème montrera effectivement cette existence), montrer que pour toute norme  $N$  définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , il existe une constante  $C$  réelle positive telle que :  $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ ,  $N(AB) \leq CN(A)N(B)$ .

I.9- Soit  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $P \in GL_n(\mathbb{C})$ . Montrer que la suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $A$  si et seulement si la suite  $(P^{-1}A_kP)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $P^{-1}AP$ .

I.10- a) Soit  $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  un élément de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $T^k$  et en déduire que la suite  $(T^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge si et seulement si  $(|\lambda| < 1)$  ou  $(\lambda = 1 \text{ et } \mu = 0)$ .

b) Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de  $A$  pour que la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$  soit convergente.

c) Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  non diagonalisable. Montrer que la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est convergente si et seulement si  $\rho(A) < 1$ . Dans ce cas, préciser  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k$ .

d) Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\rho(A)$  pour que la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice nulle.

## Partie II

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $N$  une norme quelconque sur  $\mathbb{C}^n$ . On pose :

$$M_A = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

II.1- a) Montrer que pour tout  $X \in \mathbb{C}^n : N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)$ .

b) Montrer qu'il existe une constante réelle  $C_A$  telle que :  $\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq C_A N(X)$

c) Montrer que l'ensemble  $\left\{ \frac{N(AX)}{N(X)} \mid X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$  possède une borne supérieure dans  $\mathbb{R}$ . On

notera dans la suite :  $\widetilde{N}(A) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{N(AX)}{N(X)}$ .

d) Montrer que :  $\widetilde{N}_\infty(A) \leq M_A$ .

e) On reprend dans cette question la matrice  $G$  introduite en I.3. Déterminer un vecteur  $X_0$  de  $\mathbb{C}^3$  tel que  $N_\infty(X_0) = 1$  et  $N_\infty(GX_0) = 10$ . En déduire la valeur de  $\widetilde{N}_\infty(G)$ .

II.2- Soit  $i_0$  un entier compris entre 1 et  $n$  tel que  $\sum_{j=1}^n |a_{i_0j}| = M_A$ . En considérant le vecteur  $Y$  de  $\mathbb{C}^n$  de composantes  $y_j$  définies par :  $y_j = \frac{\overline{a_{i_0j}}}{|a_{i_0j}|}$  si  $a_{i_0j} \neq 0$  et  $y_j = 1$  si  $a_{i_0j} = 0$ , montrer que  $M_A \leq \widetilde{N}_\infty(A)$  et en déduire  $\widetilde{N}_\infty(A) = M_A$ .

II.3- Montrer:

a)  $\widetilde{N}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$

b)  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \widetilde{N}(\lambda A) \leq |\lambda| \widetilde{N}(A)$ .

c) En déduire :  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \widetilde{N}(\lambda A) = |\lambda| \widetilde{N}(A)$ .

d)  $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \widetilde{N}(AB) \leq \widetilde{N}(A) + \widetilde{N}(B)$ .

e)  $\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq \widetilde{N}(A)N(X)$ .

f) Déduire de ces résultats que  $\widetilde{N}$  est une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On lui donne le nom de norme matricielle subordonnée à la norme  $N$ .

II.4- a) En considérant une valeur propre  $\lambda$  de  $A$  telle que  $|\lambda| = \rho(A)$ , montrer que  $\rho(A) \leq \widetilde{N}(A)$ .

b) Donner un exemple simple de matrice  $A$  non nulle vérifiant  $\rho(A) = \widetilde{N}_\infty(A)$ .

c) Montrer que si  $A$  est nilpotente non nulle, on a l'inégalité stricte  $\rho(A) < \widetilde{N}(A)$ .

II.5- Montrer que si  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_n$ , alors  $\rho(A) < 1$ .

**Dans toute la suite du problème, on admettra que, réciproquement, si  $\rho(A) < 1$ , alors  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_n$ .**

II.6- a) Montrer que pour tout  $k$  entier naturel non nul :  $\rho(A) < \left[ \widetilde{N}(A^k) \right]^{\frac{1}{k}}$ .

b) Montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}, \rho(\alpha A) = |\alpha| \rho(A)$ .

c) Soit  $\varepsilon > 0$  et  $A_\varepsilon = \frac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$ . Vérifier que  $\rho(A_\varepsilon) < 1$  et en déduire l'existence d'un entier naturel  $k_\varepsilon$  tel que :  $\forall k \in \mathbb{N}, k > k_\varepsilon \Rightarrow \widetilde{N}(A^k) \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k$ .

d) En déduire  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ \widetilde{N}(A^k) \right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$ .

## Partie III

Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  est dite positive (resp. strictement positive) et on note  $A \geq 0$  (resp.  $A > 0$ ) si et seulement si tous ses coefficients sont positifs ou nuls (resp. strictement positifs). Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , on note  $A \geq B$  (resp.  $A \leq B, A > B, A < B$ ) si et seulement si  $A - B \geq 0$  (resp.  $B - A \geq 0, A - B > 0, B - A > 0$ ).

Notons que grâce à l'identification de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on pourra parler de vecteur de  $\mathbb{R}^n$  positif ou strictement positif.

III.1- Donner un exemple de matrice  $A$  montrant que les conditions  $A \geq 0$  et  $A \neq 0$  n'impliquent pas nécessairement  $A > 0$ .

III.2-  $A, B, A, B'$  désignent des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

a) Montrer que si  $0 \leq A \leq B$  et  $0 \leq A' \leq B'$ , alors  $0 \leq AA' \leq BB'$ .

b) Montrer que si  $0 \leq A \leq B$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq A^k \leq B^k$ .

c) Montrer que si  $0 \leq A \leq B$ , alors  $\widetilde{N}_\infty(A) \leq \widetilde{N}_\infty(B)$ .

d) Montrer que si  $0 \leq A \leq B$ , alors  $\rho(A) \leq \rho(B)$ .

e) Montrer que si  $0 \leq A \leq B$ , il existe  $c \in ]0, 1[$  tel que  $A \leq cB$  et en déduire  $\rho(A) < \rho(B)$ .

III.3- Soit  $A$  une matrice positive de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que la somme des termes de chaque ligne soit constante égale à  $\alpha$ . Montrer que  $\alpha$  est valeur propre de  $A$  et que :  $\rho(A) = \alpha = \widetilde{N}_\infty(A)$ .

III.4- Soit  $A$  une matrice positive de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $\alpha_i$  la somme des termes de la  $i^{\text{ième}}$  ligne de  $A$  et  $\alpha = \min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$ . On définit la matrice  $B = (b_{ij})$  par  $B = 0_n$  si  $\alpha = 0$  et

$b_{ij} = \frac{\alpha}{\alpha_i} a_{ij}$ , si  $\alpha > 0$ . Montrer à l'aide de la matrice  $B$  ainsi construite que

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \right) < \rho(A) < \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \right)$$

III.5- Soit  $A$  une matrice positive de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $X = (x_i)$  un vecteur strictement positif de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $D_x$  la matrice diagonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ayant pour termes diagonaux  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Calculer les éléments de la matrice  $D_x^{-1}AD_x$ , et en déduire :

$$\min_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i} < \rho(A) < \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i}$$

III.6- Soit  $A$  une matrice positive de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $A$  admet un vecteur propre strictement positif, alors la valeur propre associée est  $\rho(A)$  et :

$$\rho(A) = \sup_{X > 0} \left( \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i} \right) = \inf_{X > 0} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i} \right)$$