Concours CCP 2001 PSI

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°99-186 du 16.11.99 - BOEN n°42 du 25.11.99.

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants l'un de l'autre.

PROBLEME I

Etant donné une série convergente $\sum_{k\geq 0} u_k(x)$, on note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ son reste d'ordre n, pour $n \in \mathbb{N}$ et on se propose d'étudier la série $\sum_{k\geq 0} R_n(x)$.

PARTIE I

I.1. On suppose que $u_k(x) = (-1)^k x^k$, où $x \in \mathbb{R}$.

I.1.1. Déterminer l'ensemble I des $x \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum_{k\geq 0}(-1)^k x^k$ converge et préciser sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^k$ pour $x \in I$.

I.1.2. En supposant que $x \in I$ expliciter $R_n(x)$, montrer que la série $\sum_{k\geq 0} R_n(x)$ converge et calculer sa somme $S(x) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$.

I.2. On conserve les notations du I.1 : $u_k(x) = (-1)^k x^k$; $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k x^k$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on pose $R_{-1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^k$. On considère par ailleurs la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et on pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On se propose d établir la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} r_n$ et de calculer sa somme.

I.2.1. Justifier la convergence de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et par suite l'existence de r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.2.2. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leq m$ et $I_0 = [0, 1[$.

I.2.2.1. En remarquant que $\sum_{k=n}^{m}(-1)^k x^k = R_{n-1}(x) - R_m(x)$, montrer que pour tout $x \in I_0$ on a l'inégalité : $\left|\sum_{k=n}^{m}(-1)^k x^k\right| \leq 2$.

I.2.2.2. L'entier n étant fixé, déduire en particulier de I.2.2.1 que :

$$\int_{I_0} \lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{k=n}^{m}(-1)^k x^k\right)dx = \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n}^{m}\int_{I_0}(-1)^k x^k dx$$

et par suite que $r_n = \displaystyle\int_{I_0} R_{n-1}(x)dx$.

I.2.2.3. Retrouver ainsi la valeur (bien connue !) de r_0.

I.2.2.4. Montrer que pour tout couple $(m,x) \in \mathbb{N}\times I_0$ on a l'inégalité : $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{m} R_{n-1}(x)\right| \leq 2$.

I.2.2.5. Déduire en particulier de I.2.2.4 que la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{m}\int_{I_0} R_{n-1}(x)dx$ admet une limite lorsque m tend vers $+\infty$. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} r_n$ converge et calculer sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$.

PARTIE II

Une égalité sur les restes ; quelques applications.

II.1. Egalité sur les restes.

Lorsque la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geq 1} u_k$ converge, on note toujours $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ son reste d'ordre n.

Soit $\displaystyle\sum_{k\geq 1} u_k$ une série convergente ; exprimer pour $n \in \mathbb{N}$ la différence $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} ku^k$ en fonction de n et de R_n.

II.2. Application à une suite.

Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k)\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \alpha n + \beta + o(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.3. Application à une série à termes positifs.

On suppose de plus que $u_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

II.3.l. Montrer que la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} R_k$ entraîne la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} ku_k$.

II.3.2. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} ku_k$ est convergente. Quelle est la limite de la suite $(n+1)R_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?

II.3.3. Déduire de ce qui précède que les deux séries $\displaystyle\sum_{k\geq 0} R_k$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 1} ku_k$ sont de même nature et lorsqu'elles convergent comparer alors leurs sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} R_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} ku_k$.

II.4. Application à la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^x}$.

On suppose maintenant que $u_k(x) = \frac{1}{k^x}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D =]1, +\infty[$. On note toujours $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$ le reste d'ordre n et on pose $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$ pour $x \in D$. Préciser l'ensemble D_1 des $x \in D$ tels que la série $\sum_{n\geq 0} R_n(x)$ soit convergente et exprimer pour $x \in D_1$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$ à l'aide de la fonction ζ.

II.5. Application à une série entière.

On suppose maintenant que $u_k(x) = a_k x^k$, où $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, désigne une suite de nombres réels et où $x \in \mathbb{R}$. On désigne par ρ le rayon de convergence de cette série entière, on suppose $\rho > 0$ et on note $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$ pour $x \in]-\rho, \rho[$.

II.5.1. Soit $x \in]-\rho, \rho[$; justifier la convergence de la série $\sum_{k\geq 1} k a_k x^k$; en déduire que la suite $(n+1)R_n(x)$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ (et préciser cette limite).

II.5.2. En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} R_n(x)$ est convergente pour $x \in]-\rho, \rho[$ et exprimer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$ à l'aide de x et de la fonction f.

II.5.3. Exemple : on suppose que $a_k = \sin(k\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{k}\cos(k\frac{\pi}{2})$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

II.5.3.1. Déterminer alors le rayon de convergence ρ de cette série entière.

II.5.3.2. Expliciter la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$ pour $x \in]-\rho, \rho[$ (en justifiant le résultat).

PROBLEME II

Notations :

Pour $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j \leq k$, on note $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ le coefficient binomial (avec $0! = 1$).

Si $n \in \mathbb{N}$ on note $[[0, n]]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $0 \leq k \leq n$; on désigne par $M_{n+1}(\mathbb{R})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre $n+1$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Si $M \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ on note $M = (m_{i,j})$ avec $(i, j) \in [[0, n]]^2$ où $m_{i,j}$ désigne l'élément de la ligne i et de la colonne j.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la matrice $W_n = (w_{i,j}) \in M_{n+1}(\mathbb{R})$, $(i, j) \in [[0, n]]^2$ avec $w_{i,j}$ définie par

$$\text{si } i+j \text{ est pair } (\ i+j = 2p\ ) \text{ alors } w_{i,j} = \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p$$
$$\text{si } i+j \text{ est impair alors } w_{i,j} = 0$$

On se propose de calculer le déterminant de W_n noté $detW_n$.

PARTIE I

I.1. Expliciter la matrice W_3.

I.2. Calculer $detW_3$

I.3. Pour $m \in \mathbb{N}$ on note $J_m = \displaystyle\int_0^\pi \cos^m t dt$.

I.3.1. Calculer J_0 et J_1.

I.3.2. Etablir une relation entre J_{m+2} et J_m pour $m \in \mathbb{N}$. Quelle est la valeur de J_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$?

I.3.3. Expliciter J_{2p} en fonction de p et du coefficient binomial C_{2p}^p pour $p \in \mathbb{N}$.

I.3.4. Exprimer $w_{i,j}$ en fonction de J_{i+j} , de i et de j pour tout couple $(i,j) \in [[0,n]]^2$.

PARTIE II

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0,\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère sur E le produit scalaire $< \cdot/\cdot >$ défini par :

$$Pour\ (f,g) \in E^2\ :< f/g >= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)g(t)dt\ .$$

On définit deux suites $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E par :
$\forall\ t \in [0,\pi],\quad e_0(t) = v_0(t) = 1$ et $\forall\ k \geq 1\ e_k(t) = \sqrt{2}\cos(kt)\ ,\ v_k(t) = \cos^k(t)$.
Pour $m \in \mathbb{N}$ on note $H_m(e)$ le sous-espace vectoriel $vect(e_0, e_1, \dots, e_m)$. On note, de même, $H_m(v)$ le sous-espace vectoriel $vect(v_0, v_1, \dots, v_m)$.

II.1. Calculer les produits scalaires $< e_j/e_k >$ pour $(j,k) \in [[0,m]]^2$.

II.2. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}$ la famille $(e_j)_{j\in[[0,m]]}$ est une base de $H_m(e)$.

II.3. Soit $m \in \mathbb{N}$; montrer que $v_m \in H_m(e)$, c'est-à-dire que $v_m = \displaystyle\sum_{i=0}^m q_{i,m}e_i$; expliciter $q_{m,m}$ (on ne cherchera pas à calculer $q_{i,m}$ pour $0 \leq i \leq m-1$).

II.4. Démontrer l'égalité $H_m(e) = H_m(v)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

II.5. Pour $m \in \mathbb{N}$ on note d_m, la distance de v_{m+1} au sous-espace vectoriel $H_m(e)$ (pour la distance associée au produit scalaire défini au début de la partie II). Déduire de ce qui précède la valeur de d_m .

II.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; pour $(i,j) \in [[0,n]]^2$ on note $v_j = \displaystyle\sum_{i=0}^n q_{i,j}e_i$ et on pose alors : $Q_n = (q_{i,j}) \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ avec $(i,j) \in [[0,n]]^2$.

II.6.1. Calculer $detQ_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

II.6.2. Calculer $detW_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

—— $\mathcal{FIN}$ ——