CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2001

Filière MP

EPREUVE DE PHYSIQUE I

Durée : 3 heures
Calculatrices autorisées

Ce problème étudie des mouvements de chute dans le champ de pesanteur contrariés par l'existence d'une force de type frottement fluide, que son module soit proportionnel à celui de la vitesse ou au carré de la vitesse.
La partie I où cette force est d'origine visqueuse concerne la chute de corps (une balle de tennis et une boule de pétanque) dans l'air et la partie II, où cette force est d'origine magnétique, envisage la chute d'un petit aimant dans un tube métallique.
Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures même s'il n'a pas été démontré. Les deux parties sont indépendantes et dans chaque partie de nombreuses questions sont indépendantes entre elles.
Les applications numériques sont essentielles et doivent être exécutées avec soin.
Le repère terrestre est pris galiléen et le module de l'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.

PARTIE I : Chute de corps de masses différentes dans l'air

L'axe Oz est orienté vers le bas (donc dirigé dans le sens de l'accélération de la pesanteur) et seul est étudié le mouvement de chute d'un corps de masse m lâché sans vitesse initiale. La trajectoire est donc rectiligne.
Dans l'air, ce corps est alors soumis à une force de frottement visqueux de la forme

$$-\frac{1}{2}\, C_x\, \rho_0\, S\, v^2\, \overrightarrow{u_z}$$

où ρ_0 est la masse volumique de l'air, v le module de la vitesse du corps et $\overrightarrow{u_z}$ le vecteur unitaire de l'axe Oz. S est une section et C_x un coefficient aérodynamique, tous deux caractéristiques de la forme du corps.

I 1. Préliminaires

a) En assimilant l'air à la température $T = 20$ °C et à la pression $P = 1{,}013.10^5$ Pa à un gaz parfait de masse molaire $M = 29{,}3$ g.mol^{-1}, donner sa masse volumique ρ_0 en kg.m^{-3} en prenant la valeur $R = 8{,}31$ J.mol^{-1}.K^{-1} pour la constante des gaz parfaits.

b) L'ordre de grandeur de la masse volumique du corps est $\rho \approx 2$ g.cm^{-3}. Estimer le rapport de la poussée d'Archimède au poids. Faut-il prendre en compte la poussée d'Archimède si la précision recherchée est de 1 % ?

c) Comment peut-on comprendre *qualitativement* l'existence d'une vitesse limite ?
Exprimer cette vitesse limite v_l en fonction des données de l'énoncé.

I 2. Mouvement de chute

a) Ecrire l'équation différentielle donnant la vitesse v du corps en y faisant figurer comme seules constantes v_l et g. Quelle est la caractéristique de cette équation ?

b) L'intégrer directement après avoir séparé les variables, et exprimer la vitesse $v(t)$ à l'aide d'une fonction hyperbolique et des constantes v_l et $\tau = v_l/g$ en choisissant comme instant initial $t = 0$.
Quelles sont la dimension et la signification physique de τ ?

c) Sachant que le corps est lâché à l'instant initial de la cote $z = 0$, donner l'expression de sa cote ultérieure $z(t)$ en fonction des constantes v_l et τ. Ce résultat dépend-il de la masse m ?
Montrer, par un développement limité justifié, que l'on retrouve un résultat bien connu dans le cas d'un très faible frottement; ce dernier résultat dépend-il de la masse m ? à quel principe cela est-il lié ?

I 3. Application numérique

Elle concerne des corps sphériques de diamètre d pour lesquels $C_x = 1$ et $S = \pi \dfrac{d^2}{4}$, S étant la plus grande section droite du corps perpendiculaire à la direction du mouvement. Elle est menée parallèlement pour :
- une balle de tennis (objet 1) pour laquelle $m_1 = 57{,}6$ g et $d_1 = 6{,}70$ cm
- une boule de pétanque (objet 2) pour laquelle $m_2 = 700$ g et $d_2 = 7{,}60$ cm

a) Calculer τ_1 et τ_2 d'une part, et v_{l1} et v_{l2} de l'autre. A quel paramètre est essentiellement due cette différence ?
Lâchées simultanément de la même hauteur, quelle est, de la balle de tennis et de boule de pétanque, celle qui touche le sol en premier ?

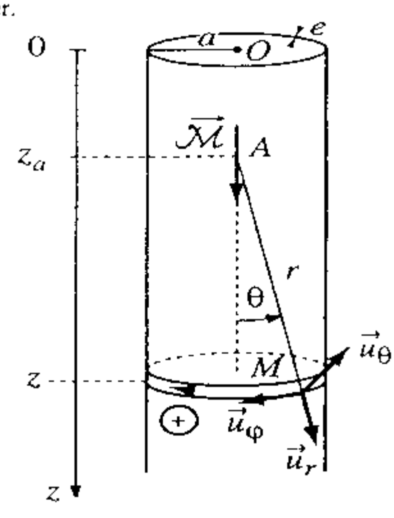
b) La hauteur de chute est fixée à $h = 1{,}80$ m au dessus du sol (hauteur d'homme) :
- calculer les deux temps de chute t_1 et t_2 puis exprimer en millisecondes la différence Δt
- avec combien de centimètres d'avance le premier corps arrive-t-il avant le second ? ces différences sont-elles suffisantes pour être notables ?

c) La hauteur de chute est fixée à $h = 10$ m au dessus du sol (4ème étage d'un immeuble) :
Reprendre les applications numériques de la question précédente et conclure.

PARTIE II : Chute d'un aimant dans un tuyau métallique

L'expérience montre que le temps de chute d'un petit aimant est beaucoup plus important dans un tuyau métallique que dans un tube de verre de même géométrie.
Cette partie se propose de comprendre l'origine de la différence et de la quantifier.

Un petit aimant A est lâché sans vitesse initiale du point O ($z = 0$); son moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\,\vec{u}_z$ est au cours du mouvement toujours vertical et dirigé vers le bas; son abscisse au cours de la chute est notée $z_a(t)$, l'axe Oz étant orienté suivant la verticale descendante.
Cette chute s'effectue à l'intérieur d'un tuyau métallique creux, d'épaisseur e faible devant le rayon moyen a. La conductivité électrique du métal est σ.
Les frottements de l'air sont négligés.
L'extrémité supérieure du tuyau est placée en $z = 0$ et sa longueur est L.



II 1. Courant induit dans un circuit élémentaire

Dans un premier temps il est commode de raisonner sur un circuit (C) de cote z constitué par un tronçon de tuyau de hauteur dz. Un point M de cette boucle est repéré par ses coordonnées sphériques d'origine l'aimant A et l'orientation positive du circuit est choisie suivant $+\overrightarrow{u_\varphi}$.

a) Expliquer qualitativement l'origine d'un courant di induit dans le circuit (C); prévoir son sens par la loi de Lenz et le représenter sur un dessin.
Interpréter alors l'existence d'une force de freinage s'exerçant sur l'aimant.

b) Le potentiel vecteur créé en un point M du circuit (C) par le dipôle magnétique est donné par l'expression suivante où $r = AM$:

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

Représenter le vecteur $\overrightarrow{A}(M)$ et donner ses coordonnées sur la base sphérique en fonction de $\mathcal{M}$, a, z et z_a.

c) Pour quelle raison ce potentiel est-il fonction du temps ?
En déduire l'expression du champ électromoteur $\overrightarrow{E_m}(M)$ en notant $v = \frac{dz_a}{dt} > 0$ la vitesse de chute de l'aimant :

$$\overrightarrow{E_m}(M) = -\frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M}\,a\,(z - z_a)\,v}{(a^2 + (z - z_a)^2)^{5/2}}\,\overrightarrow{u_\varphi}$$

Dans la suite ce champ est supposé uniforme sur l'épaisseur e du métal (car $e < a$) ainsi que sur sa hauteur dz.

d) Déterminer le courant di induit par ce champ électromoteur dans le circuit (C) par la loi d'Ohm locale et le flux du vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$ à travers une surface adéquate.
Retrouver ce résultat par la force électromotrice induite e_i et la résistance dR du circuit (C) dont la limite lorsque dz tend vers zéro est à commenter.
Le signe de di est-il conforme à la prévision faite à la question 1.a) ?

II 2. Force exercée par le tuyau sur l'aimant

Soit $\overrightarrow{F}$ la force exercée par le tuyau sur l'aimant et F_z sa projection sur l'axe Oz.
Il est plus simple d'évaluer son opposée $F_z' = -F_z$, c'est-à-dire la force exercée par l'aimant sur le tuyau.

a) Rappeler les expressions des composantes B_r et B_θ du champ magnétique (en coordonnées sphériques) créé par le dipôle magnétique A au point M du circuit (C) en fonction de $\mathcal{M}$, θ et $r = AM$.

b) Exprimer sur la base $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ la force $d^2\overrightarrow{F}'$ exercée par le champ de l'aimant sur un élément $\overrightarrow{dl}' = dl\,\overrightarrow{u_\varphi}$ du circuit (C) et la représenter sur un dessin, puis la projeter sur Oz et en donner la résultante dF_z' pour le circuit (C) entier en fonction de $\mathcal{M}$, di, a, r et θ.

c) En exprimant $\sin\theta$, $\cos\theta$ et r en fonction de z et z_a, montrer que F_z, la composante de la force exercée par le tuyau entier sur l'aimant, est finalement donnée par l'intégrale :

$$F_z = -\frac{9\,\mu_0{}^2\sigma\,e\,\mathcal{M}\,a^3 v}{8\,\pi}\int_0^L \frac{(z - z_a)^2\,dz}{(a^2 + (z - z_a)^2)^5}$$

d) Effectuer dans l'intégrale précédente le changement de variable $x = \frac{z - z_a}{a}$ et justifier physiquement l'utilisation de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{(1+x^2)^5} = \frac{5\pi}{128}$$

sachant entre autre que $a << L$.

e) En déduire que la force de freinage du tuyau sur l'aimant est du type $\vec{F} = -\alpha\,\vec{v}$ où α est un coefficient positif indépendant de la position z_a de l'aimant. Donner l'expression de α.
Commenter le signe - ainsi que la forme générale de la force.

f) **Application numérique.** L'expérience est facilement réalisable en prenant :
- pour le tuyau de cuivre : $a = 3{,}5$ mm ; $e = 1$ mm ; $L = 1$ m ; $\sigma = 5{,}8\ .10^7\ \Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$.
- pour l'aimant en Néodyme-Fer-Bore de masse m (en forme de petit disque de 5 mm de diamètre et 2 mm de haut), le constructeur fournit les valeurs : $m = 0{,}29$ g ; $\mathcal{M} = 3{,}7\ .10^{-2}$ A.m^2.
- par ailleurs, $\mu_0 = 4\pi\ .10^{-7}$ H.m^{-1}.

Donner la valeur numérique de α.

II 3. Mouvement de chute de l'aimant dans le tuyau métallique

a) Intégrer l'équation différentielle du mouvement de l'aimant et exprimer sa vitesse $v(t)$ et sa cote $z_a(t)$ à l'aide de la vitesse limite atteinte v_l et d'un temps τ caractéristique du régime transitoire. Donner l'expression de v_l en fonction de α et la relation entre v_l et τ.

b) Calculer numériquement v_l, τ et $z_a(\tau)$ dans des unités convenables en reprenant les données de la question **II 2.f)** ou à défaut en prenant $\alpha = 3{,}7.10^{-2}$ kg.s^{-1} et commenter.

c) En déduire simplement le temps de chute total t_c de l'aimant dans le tuyau et le comparer à celui t_c' de sa chute dans un tube de verre de mêmes caractéristiques géométriques. Commenter.
L'expérience donne pour le tuyau de cuivre un temps de chute de l'ordre de 10 s ; le modèle développé dans ce problème paraît-il satisfaisant ?

d) Les frottements de l'air ont été négligés dans cette étude. Est-ce raisonnable ?

Fin de l'énoncé