

CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2001

Filière MP

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures

L'utilisation de toute calculatrice est interdite pour cette épreuve

Préliminaires

Dans toute la suite, \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{R} celui des réels, \mathbb{C} celui des complexes, $\mathbb{R}[X]$ celui des polynômes à une variable à coefficients réels et, pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X] = \{ P \in \mathbb{R}[X] / \deg P \leq n \}$; $M_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans \mathbb{K} , avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Si A est une matrice, tA représente sa transposée.

PROBLEME 1

Soit n un entier au moins égal à 2 ; pour i entier variant de 0 à n , on considère le polynôme:

$$P_i(X) = (1 - X)^i (1 + X)^{n-i} ;$$

si a_{ij} est le coefficient de X^{i-1} dans P_{j-1} , soit $A = (a_{ij}) \in M_{n-1}(\mathbb{R})$;

on note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $B = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

1. Dans cette question seulement $n = 2$; expliciter A et déterminer ses éléments propres.

2. Montrer que (P_0, \dots, P_n) est une base de E . (On pourra étudier, pour i fixé, les indices j tels que $(1+X)^{n-i}$ divise P_j)

3. Soit $u \in L(E)$ tel que $M_B(u) = A$;

a. Calculer, pour tout j , $\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} P_{i-1}$.

b. Calculer A^2 et en déduire le polynôme minimal de A ; A est-elle diagonalisable ?

c. Calculer $|\det A|$.

4. On suppose n impair dans cette question ; soit $m = (n-1)/2$;

a. Montrer que $B_1 = (1, X, X^2, \dots, X^m, P_0, \dots, P_m)$ est une base de E (on pourra étudier les diviseurs communs à P_0, \dots, P_m)

b. Déterminer $M_{B_1}(u)$; en déduire le déterminant et la trace de A .

c. Quelles sont les valeurs propres de A ?

5. On suppose maintenant n pair et l'on pose $m = n/2$;
- Montrer que $B_2 = (1, X, \dots, X^{m-1}, P_0, \dots, P_m)$ est une base de E .
 - Déterminer $M_{B_2}(u)$; en déduire le déterminant et la trace de A .
 - Quelles sont les valeurs propres de A ?

PROBLEME 2

Soit n un entier au moins égal à 3 ; si $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$, on note $c(A)$ sa comatrice, de terme général A_{ij} , cofacteur de a_{ij} dans A . On rappelle les relations :

$$A \cdot {}^t c(A) = {}^t c(A) \cdot A = \det A \cdot I_n \text{ où } I_n \text{ est la matrice unité.}$$

On note $\chi_A(t)$ le polynôme $\det(A - t \cdot I_n)$. On confond tout élément de $M_n(C)$ avec l'endomorphisme de C^n qu'il représente dans la base canonique de C^n . On se propose de caractériser les matrices qui sont des comatrices.

1. Soient A_0, \dots, A_r dans $M_n(C)$ et $\varphi(t) = \sum_{i=0}^r t^i A_i$, t élément de C ; si φ s'annule pour plus de r valeurs de t , montrer que les A_i sont toutes nulles.

2._

- a. Si A est dans $M_n(C)$, montrer l'existence et l'unicité de R_0, \dots, R_{n-1} telles que, pour tout t dans C ,

$${}^t c(A - t \cdot I_n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i.$$

- b. Soit $P(t) = \frac{\chi_A(0) - \chi_A(t)}{t}$; démontrer: $c(A) = P({}^t A)$.

3._

- a. Si A est de rang n , montrer que $c(A)$ est de rang n ; que vaut $c(c(A))$?
 b. Si A est de rang $n-1$ et si L_1, \dots, L_n sont ses lignes, calculer $c(A) \cdot L_i$ pour tout i et vérifier que le rang de $c(A)$ est 1.
 c. Si A est de rang au plus $n-2$, montrer que $c(A)$ est nulle.

4. Soient M, N dans $M_n(C)$;

- Si M et N sont inversibles, montrer que $c(M \cdot N) = c(M) \cdot c(N)$
- Soient $M(t) = M - t \cdot I_n$ et $N(t) = N - t \cdot I_n$, t complexe ; montrer que, pour tout t de module assez petit, $c(M(t) \cdot N(t)) = c(M(t)) \cdot c(N(t))$.
- Vérifier que, pour M et N quelconques, $c(M \cdot N) = c(M) \cdot c(N)$.
- Si M est un projecteur, que peut-on dire de $c(M)$?

5. Soit A dans $M_n(C)$, A projecteur de rang $n-1$;

- Déterminer $\chi_A(t)$. (On pourra utiliser une base de $\text{Im } A$ et une base de $\text{Ker } A$)
- Montrer que $c(A) = I_n - {}^t A$.
- Si M est un projecteur de rang 1 dans $M_n(C)$, montrer que M est une comatrice.

6. Soit M dans $M_n(C)$, M diagonalisable de rang 1 ;

- Montrer l'existence de λ complexe non nul tel que $\lambda \cdot M$ est un projecteur.
- Montrer que M est une comatrice.

7. Soit A dans $M_n(\mathbb{C})$, A non diagonalisable et de rang 1 ;
- a. Montrer que $A^2 = 0$ et que A est semblable à $A_1 = (\alpha_{ij})$, avec $\alpha_{1,n} = 1$ et $\alpha_{ij} = 0$ sinon .
 - b. Soit $D_1 = (\beta_{ij})$ dans $M_n(\mathbb{C})$, avec $\beta_{ii} = 1$ pour $i = 2, \dots, n-1$, $\beta_{1n} = -1$ et $\beta_{ij} = 0$ dans tous les autres cas ; calculer $D_1^2 - D_1$, $D_1 A_1$ et $A_1 D_1$; que vaut $\text{rang } D_1$?
 - c. Montrer l'existence de D de rang $n-1$ telle que : $D^2 - D = A$, $A.D = D.A = 0$ et $I_n - D$ est de rang 2 ; comparer D^3 et D^2 .
 - d. Montrer que $\chi_D(t) = t^2.(1-t)^{n-2}$ et en déduire $c(D)$.
 - e. Montrer que A est une comatrice .
8. Caractériser les éléments de $M_n(\mathbb{C})$ qui sont des comatrices .

Fin de l'énoncé