ÉCOLE NATIONALE DU GÉNIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT
DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 2000

ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES A

COMMUNE AUXDEUXF'ILIERES
PHYSIQUE CHIMIE
PHYSIQUE ET SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

DUR&E : 3 heures

N.B. : Ce sujet comporte 3 pages de texte

Les calculatrices sont interdites

*SI au cours dè **l'épreuve,** un **candidat repère** ce qui **lui semble être** une erreur **d'énoncé,** il **le signale** sur sa wpie et poursuit sa **composition** en **expliquant les raisons** des **initiatives** qu'il est **amené à** prendre.*

I

1. Montrer que pour n entier ≥ 2 et pour $x \in [0. +\infty[$, la fonction $t \mapsto e^{-xt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On définit alors sur $\mathbb{R}^+$ la fonction f_n par la formule :
$f_n(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt.$
Etudier la continuité-de f_n.

2. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ la fonction $t \mapsto e^{-xt}\frac{\sin t}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On définit alors la fonction f_1 sur Jo, $+\infty[$ par la formule $f_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\, dt$. Etudier la continuité de f_1.

3. Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, établir l'inégalité : $|f_n(x)| \leq \frac{1}{x}$. En déduire la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par la formule :
$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k(x) = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\, dt.$
a) Etablir l'encadrement :
$\forall k \geq 1, \forall x \in [0, +\infty[,\ \frac{2e^{-(k+1)\pi x}}{(k+1)\pi} \leq |u_k(x)| \leq \frac{2e^{-k\pi x}}{k\pi}.$
b) Montrer que la série de fonctions $x \mapsto \sum_{k\geq 0} u_k(x)$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série $\sum_{k\geq 0} |u_k|$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$, sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et, pour a > 0, sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

c) Déduire de ce qui précède que la fonction f_1 définie à la question 2. admet un prolongement par continuité en $x = 0$. On continuera à nommer f_1 la fonction ainsi prolongée.

5. Pour quelles valeurs **du réel α la fonction** $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est-elle **intégrable** sur $]0, +\infty[$?

II

Dans cette section, on détermine les fonctions f_n, définies dans la section 1, pour les trois premières valeurs **de n, au moyen de leurs dérivées.**

1. Montrer que pour $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, et que l'on a, pour $k \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} f_n^{(k)}(x) = 0$ ($f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction f).

2. **a) Trouver une expression simple de la fonction f_1' sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Expliciter** alors f_1 sur $[0, +\infty[$. **Que vaut la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$?**

b) Calculer f_2''. En déduire une expression explicite de f_2 sur **$[0, +\infty[$.**

c) Exprimer f_3'' au moyen de la fonction f_1.

III

Dans cette section, on étudie certaines séries formées à partir des fonctions f_n définies dans la section 1.

1. Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = f_n(0)$. Prouver que la suite (a_n) converge vers 0.

2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_{2n}$ converge **uniformément sur $[0, +\infty[$ et exprimer** *sa* **somme sous forme d'une intégrale.**

3. **a) Etablir, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'inégalité $\sin t \geq t - \frac{t^3}{6}$.**

b) **Pour $\alpha \in [0, 1[$** et **$n \in \mathbb{N}$, prouver** la relation **$(1-\alpha)^n \geq 1 - n\alpha$.**

c) Déduire de ce qui précède l'inégalité :

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \forall n \geq 1, \quad \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \geq 1 - \frac{nt^2}{6}.$$

d) Démontrer qu'on a pour tout $n \geq 1$, l'inégalité $a_{2n} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{9n^2}$. En déduire la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$.

4. Soit $x > 0$ fixé. Calculer l'intégrale $\int_0^{1/n} e^{-xt}\left(1-\frac{nt^2}{6}\right)dt$ et en donner un développement limité au premier ordre en puissances de $\frac{1}{n}$.

Montrer que pour $x \geq 0$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{2n}(x)$ diverge. Que peut- on dire alors de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$?