

Concours Ecole Naval 1991

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures)

Le correcteur tiendra le plus grand compte du soin qu'apporteront les candidats à la présentation de leurs copies et à la rédaction.

Le correcteur souhaite vivement que les candidats soulignent - dans chaque démonstration - le point (ou l'idée) qui leur semble le plus important. Les candidats pourront traiter une question en admettant les résultats des questions précédentes de l'énoncé à condition de le mentionner explicitement. La partie III peut être traitée indépendamment des parties I et II.

Rappelons que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue, alors on dit que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge si $\int_0^{+\infty} \operatorname{Re} f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} \operatorname{Im} f(t)dt$ convergent et on pose

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} f(t)dt + \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} f(t)dt .$$

PARTIE I

Soit $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que pour tout réel $\lambda > 0$ la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} v_k$ soit convergente.

Si la fonction $\lambda \rightarrow e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} v_k$ admet une limite $l \in \mathbb{C}$ quand λ tend vers $+\infty$ nous dirons que l est la limite généralisée de BOREL de la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et nous poserons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{gen} v_n = l = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} v_k$$

1) Montrer que si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (au sens usuel) vers $l' \in \mathbb{C}$, alors la limite généralisée de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe. Déterminer $\lim \operatorname{gen} (v_n)$.

2.a) Donner un exemple d'une suite bornée mais non convergente (v_n) de nombres complexes telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{gen} v_n$ existe.

2.b) Donner un exemple d'une suite non bornée (v_n) de nombres complexes telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{gen} v_n$ existe.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Dans le problème nous dirons qu'une fonction $f :]A, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ est analytique sur $]A, +\infty[$ si f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]A, +\infty[$ et si pour tout t de $]A, +\infty[$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[\subset]A, +\infty[$ et $\forall h \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$ la série $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} h^n$ converge et a pour somme $f(t_0 + h)$.

3) Soient f et g deux fonctions analytiques sur $]A, +\infty[$. Montrer que :
si f et g coïncident sur un intervalle ouvert I non vide de $]A, +\infty[$ alors $\forall t \in]A, +\infty[, f(t) = g(t)$.
(On pourra fixer un point t_0 de I et considérer l'ensemble $\{t' \in]A, +\infty[\mid \forall t$ appartenant au segment d'extrémité t_0 et t' , $f(t) = g(t)\}$)

PARTIE II

Soit $\sum_{n \leq 0} u_n$ une série - éventuellement divergente - de nombres complexes telle que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} u_n$ soit non nul ($R > 0$). Supposons en outre qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction $z \rightarrow f(z)$ définie et analytique sur $] - \varepsilon, +\infty[$ telle que

$$\forall z \in] - \min(\varepsilon, R), +\min(\varepsilon, R)[, f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} z_n .$$

D'après le 3) - il existe au plus une telle fonction analytique définie sur $] - \varepsilon, +\infty[$. Si l'intégrale généralisée : $\int_0^{+\infty} e^z f(z) dz$ converge alors nous notons (par abus) $\int_0^{+\infty} e^{-z} \left(\sum_{n \geq 0} u_n \frac{z^n}{n!} \right) dz$ sa valeur et nous l'appelons somme généralisée de BOREL de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

4) Dans cette question nous supposons que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

On pose : $S_0 = 0$ et $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4.a) Déterminer les rayons de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} S_n$ et de $\sum_{n \geq 0} \lambda^n \frac{u_n}{n!}$.

4.b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Trouver une relation simple entre : $e^{-\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} S_n$ et $\int_0^\lambda e^{-z} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{z^n}{n!} \right) dz$.

4.c) Montrer - en utilisant la question 1) - que la somme généralisée de BOREL de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, existe et que :

$$\sum_{n \geq 0} u_n = \int_0^{+\infty} e^{-z} \left(\sum_{n \geq 0} u_n \frac{z^n}{n!} \right) dz .$$

5) Donner un exemple de série divergente $\sum u_n$, telle que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n \frac{z^n}{n!}$ soit infini et telle que la somme généralisée au sens de BOREL

$$\int_0^{+\infty} e^{-z} \left(\sum_{n \geq 0} u_n \frac{z^n}{n!} \right) dz \text{ existe .}$$

6) Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Posons $u_n = \alpha^n, n \in \mathbb{N}$. Déterminer la somme généralisée au sens de BOREL de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

PARTIE III

7) On considère l'équation différentielle

$$(E) : \phi'(x) - \phi(x) = -\frac{1}{x} \quad x \in]0, +\infty[.$$

7.a) Déterminer les coefficients C_n , $n \in \mathbb{N}$, d'une solution formelle $\sum_{n \geq 0} C_n \frac{1}{x^{n+1}}$ de l'équation (E).

7.b) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Donner une expression simple de la somme de la série entière en $z \in \mathbb{C}$: $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n C_n}{n! x^{n+1}}$ quand elle converge.

Montrer que cette somme se prolonge en une unique fraction rationnelle en z qui sera notée, $f(x, z)$ définie sur $\mathbb{C} \setminus -x$.

7.c) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.tablir une relation simple entre $\int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \frac{d\xi}{1+\xi}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-z} f(x, z) dz$.

7.d) Posons : $\varphi^0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \frac{d\xi}{1+\xi}$.

Montrer que $x \mapsto \varphi^0(x)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} solution de l'équation (E).

Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a : $\left| \varphi^0(x) - \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} \right| \leq \frac{N!}{x^{N+1}}$.

8) Soient a_0, a_1, \dots, a_p des nombres réels. Montrer que l'équation différentielle $\varphi'(x) - \varphi(x) = \sum_{j=1}^p a_j \frac{1}{x^j}$ possède une unique solution u continument dérivable sur \mathbb{R}^{+*} telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$.

Donner une expression simple de u en fonction des réels a_j et des dérivées de la fonction φ^0 définie au (7.d).

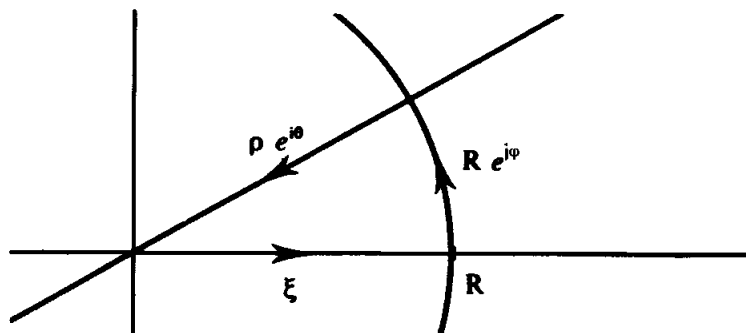
9) Posons $h(x, \xi) = \frac{e^{x\xi}}{1+\xi}$ où x est un réel > 0 fixé. Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

9.a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, l'intégrale $\varphi^\theta(x) = \int_0^{+\infty} h(x, \rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho$ converge.

9.b) Pour chaque réel $R \geq 0$ on pose :

$$\Psi(x, R) = \int_0^R h(x, \xi) d\xi + \int_0^\theta h(x, R e^{i\varphi}) R i e^{i\varphi} d\varphi - \int_0^R h(x, \rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho$$

Le dessin ci-dessous illustre la situation :



Calculer, pour $R > 0$, $\frac{d}{dR} \Psi(xR)$.

9.c) En déduire une expression simple de $\Psi(x, R)$.

9.d) Déterminer $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\theta h(x, R e^{i\varphi}) R i e^{i\varphi} d\varphi$.

9.e) En déduire que $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi^\theta(x) = \varphi^0(x)$.