

# Concours FESIC 1991

## PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

*ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe. Les théorèmes utilisés doivent être énoncés soigneusement.*

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés analytiques et arithmétiques de la fonction Dzéta de Riemann définie par  $x \mapsto S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ .

### PARTIE I

On se propose, dans cette partie, d'étudier l'allure de la fonction Dzéta.

1) Donner l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $S$ .

2) Montrer que  $S$  est une fonction strictement décroissante sur  $\mathcal{D}$ .

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ , on pose :  $\varphi_n(x) = \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{t^x} - \frac{1}{t^{x+1}} \right) dt$ .

3.a) Montrer que  $\varphi_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

3.b) On pose :  $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x)$ , pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^{+*}$  où cette série converge.

3.b.i) Montrer que cette série est normalement convergente sur tout intervalle  $[a, b]$  où  $a > 0$  et  $b > a$ . (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis).

3.b.ii) La série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi'_n(x)$  est-elle normalement convergente sur cet intervalle ?

3.c.i) Après avoir vérifié l'égalité :  $S(x) = \frac{1}{x-1} + \varphi(x)$ , montrer que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{D}$ . Quel est le signe de la dérivée  $S'$  sur  $\mathcal{D}$  ?

3.c.ii) Montrer que  $S(x)$  est équivalent à  $\frac{1}{x-1}$  au voisinage de 1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 1$ .

4) Tracer la courbe représentant  $S$  dans un repère orthonormé.

5) Pour tout  $x$  réel où la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$  converge, on pose  $\omega(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

5.a) Donner l'ensemble de définition  $\mathcal{D}'$  de  $\omega$ .

5.b) Pour tout  $a > 0$  et pour tout  $x \in [a, +\infty[$ , établir que :

$$\left| \omega(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leq \frac{1}{(N+1)^a} .$$

En déduire que  $\omega$  est continue sur  $\mathcal{D}'$ .

5.c) Montrer que, pour tout  $x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$  :  $\omega(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) S(x)$ .

## PARTIE II

On s'intéresse, dans cette partie, à l'étude de certaines sommes  $S(2k)$ , ainsi qu'à une série convergeant rapidement vers  $S(3)$ .

1) Soit  $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  fixé et  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique définie par :

$$\forall x \in [-\pi, +\pi], f(x) = \cos(tx).$$

1.a) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de  $f$ .

1.b) La série de Fourier de  $f$  converge-t-elle vers  $f$  ?

1.c) En déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $\cot \pi x = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \right)$

puis que :  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ ,  $x \cot x = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{n^2\pi^2 - x^2}$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $g_n : ]-\pi, \pi[ \longrightarrow \mathbb{R}$ .

$$x \longmapsto \frac{x^2}{n^2\pi^2 - x^2}$$

2.a) Développer  $g_n$  en série entière à l'origine. Quel est son rayon de convergence ?

2.b) Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $S_N(x) = 1 - \sum_{n=1}^N \frac{2x^2}{n^2\pi^2 - x^2}$ .

Montrer que  $S_N$  est développable en série entière et donner son développement. Quel est son rayon de convergence ?

3) Pour  $x$  réel, on pose  $T(x) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} S(2n) \frac{x^{2n}}{\pi^{2n}}$  lorsque cette série converge.

3.a) Montrer que le rayon de convergence de cette série est égale à  $\pi$  (utiliser 3.c de la Partie I).

3.b) En s'aidant de  $S_N(x)$ , montrer que :

$$\forall x \in ]-\pi, \pi[, x \cot x = 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} S(2n) \frac{x^{2n}}{\pi^{2n}}$$

4.a) Ecrire le développement limité de  $x \cot x$  au voisinage de 0 à l'ordre 6.

4.b) En déduire les valeurs de  $S(2k)$ , puis celles de  $\omega(2k)$  pour  $k = 1, 2, 3$ .

5.a) Soit  $h : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{\arcsin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que pour tout  $|x| < 1$ , on a :

$$(E) \quad h(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \frac{x^{2n}}{2n+1} \quad \text{où } c_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)}.$$

On admettra dans la suite du problème que l'égalité (E) s'étend à l'intervalle  $[-1, +1]$ , et que la convergence de la série est uniforme sur cet intervalle.

5.b) Calculer  $\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} t \, dt$ , et en déduire que :  $c_k \int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} t \, dt = \frac{1}{2k+1}$ .

5.c) Montrer que : pour  $|x| \leq 1$ ,  $\int_0^x \frac{\arcsin t}{t} dt = x + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \frac{\sin^{2k+1} t}{(2k+1)^2}$ .

Puis que : pour  $|t| \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\int_0^t u \cot u \, du = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \frac{\sin^{2k+1} t}{(2k+1)^2}$ .

6.a) Montrer l'égalité :

$$\text{pour } |t| \leq \frac{\pi}{2}, t - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S(2n)}{\pi^{2n}} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{\sin^{2n+1} t}{(2n+1)^2}$$

et enfin que :

$$S(3) = \frac{\pi^2}{7} \left( 1 - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S(2n)}{(2n+1)(2n+2)2^{2n}} \right) \quad (*)$$

6.b) Donner un équivalent de  $S_n(3) - S(3)$  en  $+\infty$ .

7) On désire obtenir une valeur approchée de  $S(3)$  à  $10^{-3}$  près.

7.a) Combien de termes devra-t-on calculer si l'on utilise la définition  $S(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

7.b) Montrer que les quatre premiers termes suffisent si on utilise la relation (\*).

7.c) Donner une valeur approchée de  $S(3)$  et conclure.

———— FIN ————