

# Concours ENSI 1991 P

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES SPIII

(Durée : 4 heures)

Dans tout le problème, on désigne par :

$\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels ;

$\mathbb{R}^+$  (respectivement  $\mathbb{R}^{+*}$ ) l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls (respectivement strictement positifs) ;

$\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs ;

$x$  une variable réelle ;

$y$  une fonction de la variable  $x$  définie sur une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $y'$  et  $y''$ , si elles existent, les dérivées première et seconde de  $y$ .

Le but de ce problème est d'étudier différentes propriétés d'une solution de l'équation différentielle

$$(E) : xy'' + y' + xy = 0 .$$

### PARTIE I

On s'intéresse à la recherche d'une solution de (E) développable en série entière et on exprime, de deux façons différentes, cette solution sous la forme de l'intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre.

1) Déterminer une solution  $F$  de (E) développable en série entière et telle que  $F(0) = 1$  ; expliciter le rayon de convergence de la série obtenue et calculer  $F'(0)$ .

2) Soient  $g$  la fonction des deux variables  $x$  et  $\theta$  définie sur  $\mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}]$  par :

$$(x, \theta) \mapsto g(x, \theta) = \cos(x \sin \theta)$$

et  $h$  la fonction des deux variables  $x$  et  $t$  définie sur  $\mathbb{R} \times [0, 1[$  par :

$$(x, t) \mapsto h(x, t) = \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} .$$

2.a) Montrer que l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$  est absolument convergente quel que soit  $x$  dans  $\mathbb{R}$ .

2.b) On pose:  $G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x, \theta) d\theta$  et  $H(x) = \int_0^1 h(x, t) dt$ .

2.b.i) Montrer que  $G(x) = H(x)$  pour tout  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ .

2.b.ii) Montrer que  $G$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  et donner l'expression de la dérivée d'ordre  $n$  de  $G$  sous forme d'une intégrale.

2.b.iii) Montrer que  $G$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

2.c) On note respectivement  $G'$  et  $G''$  les dérivées première et seconde de  $G$ .

2.c.i) Calculer  $G(0)$ .

2.c.ii) Utilisant l'expression de  $G'$  obtenue en 2.b.ii) montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} , G'(x) = -x(G''(x) + G(x)) .$$

2.c.iii) Exprimer  $F(x)$  en fonction de  $G(x)$ , respectivement de  $H(x)$ .

2.d.i) Montrer que, quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que, quel que soit  $x$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\left| \int_{\alpha}^1 h(x, t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2.d.ii)  $\alpha$  étant ainsi choisi, calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\alpha} h(x, t) dt$  puis déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

2.d.iii) Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$  :  $H'(x) = \int_0^1 \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .

2.d.iv) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x)$ .

## PARTIE II

On se propose de montrer, d'une part, que quel que soit l'entier relatif  $k$ , la fonction  $F$  s'annule dans tout intervalle  $]k\pi, (k+1)\pi[$  et d'autre part que si  $\varphi$  désigne une solution de  $(E)$  sur un intervalle  $] -\rho, \rho[$  avec  $\rho > 0$  alors  $\varphi$  et  $F$  sont proportionnelles.

1) Vérifier que s'il existe un réel  $x_i$  tel que  $F(x_i) = 0$  alors  $F(-x_i) = 0$  et  $x_i$  est différent de zéro.

2) On suppose dans cette question que  $x$  est strictement positif et on considère la fonction  $u$  de la variable  $x$  définie par :  $x \mapsto u(x) = \sqrt{x}F(x)$ .

2.a) Montrer que  $u$  vérifie une équation différentielle du second ordre du type :  $u'' + A(x)u = 0$  où  $A$  est une fonction de la variable  $x$  que l'on explicitera.

2.b) Soit  $v$  une application deux fois dérivable de  $\mathbb{R}^{+*}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que la relation :

$$(R_1) : \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{d}{dx} [u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] = \frac{u(x)v(x)}{4x^2}$$

est vérifiée si et seulement si  $v$  est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on explicitera.

2.c.i) Dédurre de ce qui précède que :

$$(R_2) : \forall p \in \mathbb{N}^*, \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{u(x) \sin x}{4x^2} dx = (-1)^{p+1} (u((p+1)\pi) + u(p\pi)).$$

2.c.ii) Montrer que  $\int_0^{\pi} \frac{u(x) \sin x}{4x^2} dx$  converge et est égale à  $-u(\pi)$ .

2.d) Utilisant la question 2-c), démontrer que, quel que soit  $p$  dans  $\mathbb{N}$ , il existe  $x_p \in ]p\pi, (p+1)\pi[$  tel que  $u(x_p) = 0$  ; en conclure que  $F$  s'annule sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , respectivement sur  $\mathbb{R}^{-*}$ , une infinité de fois.

3.a) Montrer que  $F$  est de signe constant sur  $[-2, 2]$  et préciser ce signe.

3.b) Dans cette question  $\varphi$  désigne une solution de  $E$  sur  $] -\rho, \rho[$ , avec  $\rho$  réel strictement positif. On pose  $\Delta = ] -\rho, \rho[ \cap [-2, 2]$ .

3.b.i) Ecrire l'équation différentielle ( $E_1$ ) vérifiée, par la fonction  $z$  définie sur  $\Delta$  par :  $z(x) = \frac{\varphi}{F(x)}$ .

3.b.ii) Dédire de ( $E_1$ ) que  $xz'(x)F^2(x)$  est constant sur  $\Delta$  ; en conclure que les restrictions de  $\varphi$  et de  $F$  à  $\Delta$  sont proportionnelles.

### PARTIE III

$\lambda$ , désignant un réel non nul, on étudie différentes propriétés de la fonction  $F_\lambda$ , de la variable  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F_\lambda(x) = F(\lambda x)$ .

1.a) Ecrire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $F_\lambda$ .

1.b) Soit  $a$  un réel strictement positif. Déterminer toutes les solutions, développables en série entière, de l'équation différentielle :  $xy'' + y' + axy = 0$ .

2) Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux valeurs distinctes de  $\lambda$ . Montrer que, pour tout  $x$  réel l'expression

$$\frac{d}{dx} \{x[F'_{\lambda_1}(x)F_{\lambda_2}(x) - F_{\lambda_1}(x)F'_{\lambda_2}(x)]\} + x(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)F_{\lambda_1}(x)F_{\lambda_2}(x)$$

garde une valeur constante que l'on déterminera.

3) Dédire de ce qui précède la valeur de l'intégrale :  $J = \int_0^1 xF_{x_i}(x)F_{x_j}(x)dx$  sachant que  $F(x_i) = F(x_j) = 0$  et  $x_i \neq x_j$ .

### PARTIE IV

$s$  étant un réel strictement positif on se propose de calculer :

$$F^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} F(x) dx$$

1) Montrer que  $F^*$  converge quel que soit  $s$  strictement positif.

2.a)  $t$  étant un réel quelconque, montrer que l'intégrale :  $\int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos(tx) dx$  converge quel que soit  $s$  strictement positif et quel que soit  $t$  ; calculer sa valeur en fonction de  $t$  et de  $s$ .

2.b) Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + s^2)\sqrt{1-t^2}}$  converge quel que soit  $s$  strictement positif et calculer sa valeur en fonction de  $s$ .

3) On admet que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) dx = \int_0^1 \frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}} \left( \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos(tx) dx \right) dt .$$

3.a) Calculer  $F^*(s)$ ,  $s > 0$ .

3.b) Calculer  $\lim_{\substack{s > 0 \\ s \rightarrow 0}} F^*(s)$ .