Concours EITPE 1991 M P' TA

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES COMMUNE

(Durée : 4 heures)

Première partie : L'intégrale λ_n. Les fonctions Λ et L.

1.a. Quel est l'ensemble E des nombres x réels tels que $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ existe.

Pour $x \in E$, simplifier $S(x)$.

1.b. Simplifier, pour $x \in E$, l'expression de $R_n(x) = S(x) - \sum_{k=0}^{n} x^{2k}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ (entier naturel), on pose $\lambda_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \theta d\theta$. Calculer λ_n au moyen de factorielles.

3.a. Pour $t \in E$, calculer $\Lambda(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t \cos \theta) d\theta$.

3.b. Montrer que Λ ainsi définie admet un développement en série entière que l'on précisera, ainsi que son rayon de convergence.

4. Pour $t \in E$, prouver l'existence de $L(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Lambda(t \cos \theta) d\theta$ et montrer que L ainsi définie admet un développement en série entière que l'on précisera ainsi que son rayon de convergence.

Deuxième partie : Etude de $\Delta(\alpha, \beta)$

On donne deux réels α et β vérifiant $0 < \alpha \leq \beta$ et on pose

$$\Delta(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}}$$

1. Ranger dans l'ordre croissant (au sens large) les réels $\Delta(\alpha, \beta)$, $\Delta(\alpha, \alpha)$, $\Delta(\beta, \beta)$ et en déduire un encadrement simple de $\Delta(\alpha, \beta)$.

2. On pose (provisoirement) $\omega = \arctan \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ (on a $0 < \omega \leq \frac{\pi}{4}$).

Transformer $\int_\omega^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}}$ en prenant pour nouvelle variable $\psi = \arctan \frac{\alpha}{\beta \tan \theta}$.

En déduire une relation simple entre $\Delta(\alpha, \beta)$ et $\int_0^{\omega} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}}$.

3. Transformer $2 \int_0^{\omega} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}}$ en adoptant cette fois la nouvelle variable d'intégration $\phi = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} . \tan \theta \right)$.

4.a. Transformer l'intégrale obtenue au terme de la question précédente de manière à lui donner la forme : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{a + b \cos^2 \phi}}$ où a et b sont des constantes.

4.b. Démontrer l'existence de deux nombres réels α' et β' autres que α et β vérifiant les conditions $0 < \alpha' \leq \beta'$ et $\Delta(\alpha', \beta') = \Delta(\alpha, \beta)$. Exprimer α' et β' en fonction de α et β.

Troisième partie : Une propriété de la fonction L.

(L est la fonction définie dans la première partie)

1. On considère deux réels α et β vérifiant $0 < \alpha \leq \beta$ et deux réels α' et β' autres que α et β, définis dans la deuxième partie et vérifiant $0 < \alpha' \leq \beta'$ et $\Delta(\alpha', \beta') = \Delta(\alpha, \beta)$.
Calculer en fonction de α et β exclusivement les réels positifs qu'on notera : A, B, t, u, tels que $\Delta(\alpha, \beta) AL(t)$ et $\Delta(\alpha', \beta') = BL(u)$. S'assurer que A et B sont positifs strictement .

2. Calculer, en fonction de t exclusivement le nombre u et le rapport $\dfrac{L(u)}{L(t)}$. Ecrire, en n'utilisant que le réel t, la relation obtenue.

Quatrième partie : Moyenne arithmético-géométrique.

On considère deux réels fixes α et β tels que $0 < \alpha \leq \beta$.

1.a. Montrer que l'on peut définir par récurrence deux suites : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$u_0 = \alpha$, $v_0 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{k+1} = \sqrt{u_k v_k}$ et $v_{k+1} = \dfrac{u_k + v_k}{2}$.

1.b. Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune notée $M(\alpha, \beta)$
(qu'on appellera moyenne arithmético-géométrique de α et β).

1.c. Décrire un algorithme permettant de calculer $M(3, 6)$ à 10^{-5} près. Donner une valeur k_0 entière telle que, pour $k \geq k_0$, u_k soit une valeur approchée de $M(3, 6)$ à moins de 10^{-5} près et donner cette valeur approchée.

2. On considère l'intégrale $\Delta(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2\theta + \beta^2 \cos^2\theta}}$. (On pourra utiliser les résultats de la deuxième partie.)

2.a. Comparer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\Delta(u_k, v_k)$ et $\Delta(u_{k+1}, v_{k+1})$

2.b. Comparer $\Delta(\alpha, \beta)$ et $\Delta(u_n, v_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2.c. Trouver un encadrement de $\Delta(u_n, v_n)$ puis de $\Delta(\alpha, \beta)$.

2.d. Trouver une relation simple entre $M(\alpha, \beta)$ et $\Delta(\alpha, \beta)$.

3. Trouver en fonction de α et β exclusivement deux réels a et b strictement positifs tels que $M(\alpha, \beta) = \dfrac{b}{L(a)}$.

4. Soit λ un réel strictement positif. Trouver une relation entre $M(\alpha, \beta)$ et $M(\lambda\alpha, \lambda\beta)$. En déduire que le calcul de $M(\alpha, \beta)$ peut se ramener ce calcul de $M(x, 1)$ pour une valeur appropriée de x.

Cinquième partie : La fonction Ω

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ (réel strictement positif), on désigne par $\Omega(x)$ la moyenne arithmético-géométrique des nombres 1 et x.

1. Ainsi Ω est une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Le vérifier.

2.a. Quel est l'ensemble $F = \{y \in \mathbb{R}^{+*} / \sqrt{y} \in E\}$, E étant défini au 1. de la première partie ?

2.b. Pour $y \in F$, on pose $\ell(y) = L(\sqrt{y})$. Démontrer que ℓ est indéfiniment dérivable sur F.

3. Dans cette question : $x \in]1, +\infty[$.

3.a. Transformer $\Omega(x)$ en utilisant la fonction ℓ. En déduire l'existenee et une expression de $\Omega'(x)$.

3.b. Démontrer que $\Omega'(x)$ tend vers une limite que l'on calculera lorsque x tend vers 1^+ .

4. Dans cette question : $x \in]0, 1[$.

4.a. Transformer $\Omega(x)$ en utilisant la fonction ℓ. En déduire l'existence et une expression de $\Omega'(x)$.

4.b. Démontrer que $\Omega'(x)$ tend vers une limite que l'on calculera lorsque x tend vers 1^- .

5. La fonction Ω est-elle continûment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$?

Sixième partie : la série $\sum w_n$

1. On donne un réel x_0 appartenant à $]0, 1[$.

1.a. Montrer qu'on peut définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de x_0, par la relation :
$\forall n \in \mathbb{N} \;\; x_{n+1} = \dfrac{2\sqrt{x_n}}{1+x_n}$. Etudier cette suite.

1.b. Montrer qu'on peut définir une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; z_n = \sqrt{1-x_n^2}$.
Etudier la série de terme général z_n (on écrira z_{n+1} en fonction de x_n) puis montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$, où $w_n = \ln\left(\dfrac{2}{1+x_n}\right)$.

2.a. On considére la suite $(L(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Utiliser le résultat de la fin de la troisième partie pour calculer, en fonction de x_n, le rapport $\dfrac{L(z_n)}{L(z_{n+1})}$.

2.b. Montrer que la suite $(L(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, qu'on précisera, et en déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ en fonction de $\Omega(x_0)$.

2.c. A l'aide d'une calculatrice donner les valeurs des x_n pour $n = 1, 2, 3$ à 10^{-5} près à partir de $x_0 = 0,5$. En déduire une valeur approchée de $M(3, 6)$, que l'on comparera à celle trouvée à la question 1.c. de la quatrième partie.

—— *FIN* ——