Concours EITPE 1991 option M

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

(Durée : 2 heures)

On considère la série de fonctions $\sum f_n$ définie par : $f_n(t) = \dfrac{1}{n^4 + t^4}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

En cas de convergence, on notera $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$. Soit d'autre part $\lambda = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Etude de la dérivabilité de f :

   2.1. Montrer que la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

   2.2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier les variations de f.

3. Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, décroissante telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x)dx$ soit convergente et soit $u_n = \varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   3.1. Montrer que $\sum u_n$ converge.

   3.2. Soit $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$; montrer que $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \varphi(x)dx \leq r_n \leq \int_n^{+\infty} \varphi(x)dx$

4. Etude de f au voisinage de $+\infty$:

   4.1. Montrer que f admet en $+\infty$ une limite que l'on déterminera.

   4.2. Montrer que $f(t)$ équivaut à $\dfrac{\lambda}{t^3}$ au voisinage de $+\infty$.

5. On se propose de calculer $f(0)$ à 10^{-6} près :

   5.1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que $g(0) = 2\pi^2$, et sur $]0, 2\pi[$, $g(x) = x^2$. Préciser les coefficients de Fourier de g.

   5.2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, puis celle de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ (on utilisera la formule de Parseval).

   5.3. En déduire une valeur approchée de $f(0)$ à 10^{-6} près.

   5.4. Représenter graphiquement f.

6. On étudie maintenant $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et on définit $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

6.1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ existe.

6.2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^a f_n(t)dt = \int_0^a f(t)dt$, pour tout réel $a > 0$.

6.3. Montrer que $\left| \displaystyle\int_0^a f(t)dt - \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \right| \leq h(a)$, où h est une fonction admettant une limite nulle en $+\infty$ (Pour cela, on majorera, pour $n \geq 1$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{n^4 + t^4}$ par une intégrale calculable par quadrature).

6.4. En déduire, en fonction de λ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

6.5. Calculer λ et en donner une valeur approchée à 10^{-6} près.

6.6. Donner un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$, en utilisant la même méthode qu'au 3..

6.7. Soit $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ et $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^3} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) \right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Majorer $|S - \sigma_n|$; en déduire une valeur approchée de S à 10^{-4} près et donner une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

—— $\mathcal{FIN}$ ——