Concours ESIM 1988 option M P'

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

Si (x_n) est une suite réelle, on désignera par $\prod_{k=0}^{+\infty} x_k$ la limite, lorsqu'elle existe de $\prod_{k=0}^{n} x_k$ quand n tend vers $+\infty$.

On rappelle que : $0! = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.
On notera exp est la fonction $x \mapsto e^x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Dans tout le problème u_n désigne, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction définie sur $]-1, +\infty[$, par :

$$u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \ .$$

Lorsque la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge, on note $S(x)$ sa somme.

I

1. Quel est l'ensemble de définition de S ? On notera D cet ensemble. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

2. Calculer, pour $x \in D$, $S(x+1) - S(x)$.

3. Dans les parties I et IV la fonction T sera définie sur D par : $T(x) = \exp[S(x)]$.

3.a. Montrer que T vérifie les propriétés suivantes :

(i) $T(0) = 1$,
(ii) $\forall x \in D,\ T(x+1) = (x+1)T(x)$.

3.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}\ T(n) = n!$.

4. Montrer que : $\forall x \in D\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ \ T(x+n) = T(x) \prod_{k=1}^{n} (x+k)$.

5.a Montrer que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{k+n}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1)$.

5.b. On pose : $R_n(x) = S(x+n) - S(n) - x\ln(n+1)$.
Montrer que $R_n(x)$ est le reste d'ordre n d'une série convergente (utiliser 5.a.).
En déduire que : $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$.

5.c. En déduire l'existence d'une fonction φ_n de D dans $\mathbb{R}$ telle que :

(iii) $\forall x \in D\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ \ T(x+n) = n!(n+1)^x \varphi_n(x)$
avec $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = 1$ pour tout x de D .

6.a. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$ converge. On notera γ sa somme.

6.b. Montrer que : $\forall x \in D \quad \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{k^{1-x}(k+1)^x}{x+k}=e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}$.

6.c. En déduire que : $\forall x \in D \quad T(x)=e^{-\gamma x}\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}$.

II

On désigne, dans cette partie, par T une fonction continue dont l'ensemble de définition est D et vérifiant les propriétés (i), (ii), (iii) de la partie I.

Le but de cette partie est de montrer que : $\forall x \in D,\ T(x)=\exp[S(x)]$.

1. Montrer que : $\forall x \in D,\ T(x+n)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)T(x)$.

2. En déduire que : T et φ_n sont strictement positives sur D et que :

$$\forall x \in D,\ \ln T(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right]+r_n(x)$$

avec : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x)=0$ pour tout x de D .

3. En déduire que : $\forall x \in D,\ T(x)=\exp[S(x)]$.

4. Quel résultat obtient-on en remplaçant dans l'hypothèse initial de la partie II : ≪ T une fonction continne ≫, par : ≪ T une fonction strictement positive ≫ ?

III

Dans cette partie, on prend $x \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et on définit $\Psi_{n,x}$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\Psi_{n,x}(t)=\begin{cases} t^x e^{-t} & si\ t>n \\ t^x\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] & si\ t\in[0,n] \end{cases} .$$

1. Etudier le signe de $e^{-t}-\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ sur $[0,n]$ et en déduire le signe de $\Psi_{n,x}$ sur $\mathbb{R}^+$.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\Psi_{n,x}(t)$ pour $t\in\mathbb{R}^+$.

2. Un prend dans cette question $x=0$ et $n>1$.

2.a. Un pose : $g_n(t)=(n-1)\ln(1-\dfrac{t}{n})+t$. Etudier le signe de g_n sur $[0,n]$.

2.b. Montrer que : $\exists! a_n \in]1,n[\ :\ \Psi'_{n,0}(a_n)=0$.

2.c. Donner un équivalent de $g_n(3)$ au voisinage de $+\infty$ et montrer que :

$$\exists N\in\mathbb{N}^*\ :\ \forall n\geq N\ 1<a_n<3 .$$

2.d. Etudier la convergence uniforme de la suite $(\Psi_{n,0})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}^+$.

3. Etudier, à l'aide de III.1, le signe de $\Psi'_{n,x}$ sur $[0,x]$ pour $x < n$.

4. On prend dans cette question $x \geq 1$ et $n > x$ et on pose pour $t \in]x,n[$:

$$h_n(t) = \ln\left[t - x + \frac{tx}{n}\right] - \ln(t-x) + g_n(t).$$

4.a. Pour $t \in]x,n[$, calculer $h'_n(t)$ et montrer que : $\exists! b_n \in]x,n[\;:\; h_n(b_n) = 0.$

4.b. En déduire le signe de $\Psi'_{n,x}$ sur $\mathbb{R}^+ \backslash \{n\}$.

4.c. Donner le tableau de variation de $\Psi_{n,x}$ sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que :

$$\exists K \in \mathbb{N} \;:\; \Psi_{n,x}(b_n) \leq K \frac{b_n^{x+2}}{n(b_n - x)}$$

4.d. Donner un équivalent simple de $h_n(x+1)$ et $h_n(x+3)$ quand n tend vers $+\infty$.

4.e. En déduire que la suite $(\Psi_{n,x})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

5. On prend dans cette question : $0 < x < 1$.

5.a. Comparer, pour $t \in [0,1]$, $\Psi_{n,x}(t)$ et $\Psi_{n,0}(t)$.

5.b. Comparer, pour $t \in [1,+\infty[$, $\Psi_{n,x}(t)$ et $\Psi_{n,1}(t)$.

5.c. En déduire la convergence uniforme de $(\Psi_{n,x})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}^+$.

IV

Les notations sont celles des partics I et III. En particulier : $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$

1. Etudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Psi_{n,x}(t)dt$.

2.a. Caluler : $\displaystyle\int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ et exprimer le résultat sous la forme : $\displaystyle D_n(x) \prod_{k=1}^{n+1} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1 + \frac{x}{k}}$
où D_n est une fonction à préciser.

2.b. Quelle est la limite de $D_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$? (On pourra utiliser I.5.a et I.6.a.)

2.c. En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$. Exprimer le résultat à l'aide de la fonction T de la partie I.

3. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \Psi_{n,x}(t)dt = 0.$

4. En déduire que : $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}^+,\; T(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$.

———— *FIN* ————