Concours ENSI Chimie Nord 1988

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

Dans tout le probléme, n désigne un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

PARTIE I

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$. Soit α un réel donné, on considère la matrice :

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} -n^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha - n^2 \\ 0 & 1 & -1-n^2 \end{pmatrix}$$

Soit f_α l'endomorphisme de E ayant pour matrice $A(\alpha)$ dans la base $\mathcal{U}$.

1.a) Déterminer le rang de f_α auivant les valeurs de α .

1.b) Déterminer le noyau et l'image de f_α suivant les valeurs de α. On précisera dans tous les cas une base et la dimension du noyau et de l'image de f_α.

2.a) Déterminer les valeurs propres de f_α en précisant l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre suivant les valeurs de α.

2.b) Déterminer les sous-espaces propres de f_α en précisant une base et la dimension de chaque sous-espace propre suivant les valeurs de α.

2.c) Pent-on trouver une base de E formée de vecteurs propres de f_α ? Déterminer une telle base lorsqu'elle existe.

3. On suppose dans cette question : $\alpha = n^2 - 1$.

3.a) Déterminer une base $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ de E telle que la matrice de f_{n^2-1} dans $\mathcal{V}$ soit :

$$B = \begin{pmatrix} -n^2 & 0 & 0 \\ 0 & -n^2 & 1 \\ 0 & 0 & -n^2 \end{pmatrix}$$

On choisira ces vecteurs v_1, v_2, v_3 le plus simplement possible.

3.b) Si (x, y, z) sont les coordonnées d'un élément de E dans la base $\mathcal{U}$ et (X, Y, Z) les coordonnées de cet élément dans la base $\mathcal{V}$, quelles relations a-t-on entre (x, y, z) et (X, Y, Z) ?

4) Intégrer le système différentiel :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -n^2 x \\ \frac{dy}{dt} &= -y + (1-n^2)z \\ \frac{dz}{dt} &= y - (1+n^2)z \end{aligned} \right.$$

PARTIE II

On considère le système différentiel (δ_0) :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^2} = -n^2X \\ \\ \dfrac{d^2Y}{dt^2} = -n^2Y + Z \\ \\ \dfrac{d^2Z}{dt^2} = -n^2Z \end{cases}$$

où X , Y et Z désignent des fonctions <u>réelles</u> de la variable réelle t.

1) Intégrer (δ_0).

2) On note (X_n, Y_n, Z_n) la solution de (δ_0) vérifiant les conditions suivantes :

$$Y_n(0) = \frac{k}{n}\ ,\ \frac{dY_n}{dt}(0) = \mu + \frac{1}{n^2}\ ,\ Z_n(0) = \frac{2}{n}\ et\ \frac{dZ_n}{dt}(0) = -2\ ,$$

k et μ étant deux constantes réelles indépendantes de t et de n.

2.a) Déterminer l'expression de Y_n et de Z_n.

2.b) Etudier suivant les valeurs de k et de μ la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} Y_n(t)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

2.c) Etudier suivant les valeurs de k et de μ la convergence des séries numériques $\sum_{n\geq 1} Y_n(\pi)$ et $\sum_{n\geq 1} Y_n(2\pi)$.

PARTIE III

On considére le systéme différentiel (δ_1) :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -n^2x \\ \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = (1-n^2)y - z \\ \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = y - (1+n^2)z \end{cases}$$

On note : $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\dfrac{d^2M}{dt^2} \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix}$ et on reprend les notations de la partie I.

1) Montrer que l'on peut écrire le système (δ_1) sous la forme : $\dfrac{d^2M}{dt^2} = C.M$, où C est une matrice que l'on déterminera. Comparer la matrice C et les matrices $A(\alpha)$.

2.a) (x, y, z) représentant les coordonnées d'un élément M dans la base $\mathcal{U}$, et (X, Y, Z) les coordonnées de M dans la base $\mathcal{V}$, écrire le systéme différentiel vérifié par les fonctions X , Y et Z.

2.b) En déduire X, Y, Z puis x, y, z.

3.a) Déterminer la solution de (δ_1) vérifiant les conditions suivantes :

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0 \ , \ \frac{dx}{dt}(0) = n \ , \ \frac{dy}{dt}(0) = 1 - 3n^2 \ , \ \frac{dz}{dt}(0) = 1 - n^2 \ .$$

3.b) On considère dans un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la courbe (Γ), ensenble des points M dont les coordonnées (x, y, z) sont les fonctions définies au III-3.a). Montrer que (Γ) est une courbe plane et déterminer une équation cartésienne du plan contenant (Γ).

3.c) On suppose $n = 1$. Construire avec soin la projection orthogonale sur le plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$ de la partie de (Γ) correspondant à : $t \in [-2\pi, 2\pi]$. On précisera les abcisses et paramètres de tous les points remarquables, ainsi que les tangentes en ces points. On déterminera en particulier les abscisses des points d'intersection avec l'axe $(O, \overrightarrow{i})$.

3.d) En supposant toujours $n = 1$, calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} \ dt \ .$$

Que représente cette intégrale ?

—— $\mathcal{FIN}$ ——