

Concours ENSI Chimie Centre 1988 P'

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

Soit \mathbb{N}^* l'ensemble des nombres entiers strictement positifs, et soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels dont au plus un nombre fini de termes sont nuls. On définit une nouvelle suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n = \prod_{k=1}^n p_k = p_1 p_2 \cdots p_n .$$

On se propose dans ce problème d'étudier certains cas où P_n tend vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

PARTIE I

Soit $A = \{n \in \mathbb{N}^* / p_n = 0\}$. On définit a comme étant le plus grand élément de A si A n'est pas vide, et $a = 0$ si A est vide. Soit $n_0 = a + 1$.

1. Déterminer la limite de P_n pour n tendant vers $+\infty$ lorsque A n'est pas vide.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ on définit le nombre réel Q_n par : $Q_n = \prod_{k=n_0}^n p_k$.

On dit que le *produit infini* $P = \prod_{k=1}^{+\infty} p_k$ converge si et seulement si Q_n tend vers une limite finie P non nulle lorsque n tend vers $+\infty$: $P = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

2.a. Montrer que pour que P converge il faut que p_n tende vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

2.b. On suppose que $p_n \rightarrow +1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Il existe alors $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_1$ on ait $p_n > 0$. Montrer que pour que P converge il faut et il suffit que la série de terme général $u_n = \ln p_n$ (\ln désignant le logarithme népérien) défini pour $n \geq n_1$ soit convergente.

2.c. On dit que le produit infini P est *absolument convergent* si et seulement si la série de terme général $u_n = \ln p_n$ est absolument convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = p_n - 1$. Montrer que pour que P soit absolument convergent, il faut et il suffit que la série de terme général v_n soit absolument convergente.

2.d. Soit σ une bijection quelconque de \mathbb{N}^* sur lui-même. Montrer que si le produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty} p_k$ est absolument convergent, il en est de même du produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty} p_{\sigma(k)}$.

PARTIE II

Soit $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions de la variable réelle x , à valeurs dans \mathbb{R} , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad s_{2m-1}(x) = \left(1 - \frac{x}{m\pi}\right) e^{\frac{x}{m\pi}}, \quad s_{2m}(x) = \left(1 - \frac{x}{m\pi}\right) e^{-\frac{x}{m\pi}}$$

1. Montrer que le produit infini $S(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} s_k(x)$ est absolument convergent pour toute valeur de x .

2. On suppose que x n'est pas un multiple entier de π . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n(x) = \prod_{k=1}^{2n} s_k(x) .$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(x + 2\pi)}{S_n(x)}$.

3. En déduire que la fonction $xS(x)$, définie sur \mathbb{R} tout entier, est périodique de période 2π .

4. Pour tout $x \in]-1, +1[$ on considère la fonction $f_x(t)$ de la variable réelle t périodique de période 2π , et telle que pour tout $t \in [-\pi, +\pi[$ on ait $f_x(t) = \cos(xt)$.

4.a. Développer $f_x(t)$ en série de Fourier réelle

$$a_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) \cos(nt) + b_n \sin(nt) .$$

Justifier l'égalité de $f_x(t)$ et de la somme sa série de Fourier sur \mathbb{R} tout entier.

4.b. En déduire pour tout $x \in]-1, +1[$ la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2x}{n^2 - x^2}$, et pour tout $x \in]-\pi, +\pi[$ la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}$.

4.c. Montrer que la série de terme général, défini pour $n \geq 1$, $\varphi_n(x) = \ln(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})$ est absolument convergente pour tout $x \in]-\pi, +\pi[$.

Soit $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x)$. Calculer $\Phi(0)$ ainsi que $\Phi'(x)$ pour tout $x \in]-\pi, +\pi[$.

On admettra sans démonstration que l'on peut dériver $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x)$ terme à terme.

Déduire de ce qui précède la valeur de $S(x)$ pour tout $x \in]-\pi, +\pi[$, puis pour tout $x \in \mathbb{R}$.

PARTIE III

Soit $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions de la variable réelle x , à valeurs réelles, définie pour toute valeur de x qui n'est pas un nombre entier strictement négatif par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , g_n(x) = \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}} .$$

1. Montrer que le produit infini $G_n(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} g_k(x)$ est absolument convergent pour toute valeur de x qui n'est pas un nombre entier strictement négatif.

2. Soit $G_n(x) = \prod_{k=1}^n g_k(x)$. Montrer que l'on a : $\ln G_n(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ tend vers une limite finie γ strictement positive lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. Pour toute valeur de x qui n'est pas un nombre entier négatif ou nul on pose :

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} G(x) .$$

3.a. Calculer $\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}$.

3.b. Calculer $\Gamma(1)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Montrer que l'on a pour toute valeur de x non entière : $G_n(x)G_n(-x) = \frac{1}{S_n(\pi x)}$.
En déduire la valeur de $\Gamma(x)\Gamma(-x)$ et celle de $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$. Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$.

————— FIN —————