Concours ENSI 1988

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

(Durée : 2 heures 30)

PREAMBULE

L'objet du problème est l'étude de méthodes de calcul de fonctions élémentaires (comme sinus, cosinus, exponentielle, logarithme,...). Les méthodes auxquelles on s'intéresse permettent le calcul de ces fonctions sur un intervalle en utilisant seulement des additions et des décalages (sur les représentations binaires des nombres) et sont utilisées dans la conception de certains circuits spécialisés (calculettes ou coprocesseurs arithmétiques).

L'ensemble des nombres entiers positifs ou nul est noté $\mathbb{N}$ et toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est écrite plus simplement (a_n).

Ensemble S : On désigne par S l'ensemble des suites décroissantes $B = (b_n)$ de nombres réels strictement positifs, telles que la série associée de terme général b_n soit convergente. Les suites (2^{-n}) et $(\ln(1+2^{-n}))$ sont des exemples simples de suites éléments de S (ln désigne le logarithme népérien).

A tout élément $B = (b_n)$ de S, on associe : $b = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$; $\forall\ n \in \mathbb{N}, \sigma_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$;

$S_0 = 0$ et, pour tout n strictement positif, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k$. On a ainsi : $b - b_n = S_n + \sigma_n$.

Définition : Etant donné un nombre entier p strictement positif et $B = (b_n)$ un élément de S, on dit que B est "une base discrète d'ordre p" si, pour tout élément t de l'intervalle $[0, pb]$, il existe une suite $D = (d_n)$ de nombres entiers appartenant à $\{0, 1, 2, \dots , p\}$ telle que $t = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} d_k b_k$.

On notera que pour $t = 0$, $d_k = 0$, et pour $t = pb$, $d_k = p$.

Suites (t_n) : Soit $B = (b_n)$ un élément de S et t un nombre réel de l'intervalle $[0, b]$. On définit la suite (t_n) de la façon suivante :

$$t_0 = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ t_{n+1} = \begin{cases} t_n + b_n & si\ t_n + b_n \le t \\ t_n & si\ t_n + b_n > t \end{cases} .$$

CRITERE POUR UNE BASE DISCRETE D'ORDRE 1

1- Soit $B = (b_n)$ un élément de S tel que, pour tout nombre entier n, on ait $b_n \le \sigma_n$. Montrer , par récurrence sur n, que pour tout rombre réel t de l'intervalle $[0, b]$ on a :
$0 \le t - t_n \le b_n + \sigma_n$ (traiter séparément chacune des inégalités).

2- En déduire que si $B = (b_n)$ est un élément de S vérifiant $b_n \le \sigma_n$, pour tout nombre entier n, alors B est une base discrète d'ordre 1. Vérifier que la suite (2^{-n}), élément de S, est une base discrète d'ordre 1.

CALCUL DES VALEURS DE e^t

3- Montrer que l'élément de S, $B = (\ln(1 + 2^{-n}))$,est une base discrète d'ordre 1.

Indication : Afin d'utiliser le crittère obtenu au (2-), on notera que $b_n = \ln\left(1 + \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-k}\right)$ et que, pour tous nombres positifs a et a', on a : $\ln(1 + a + a') \leq \ln(1 + a) + \ln(1 + a')$.

Donner la valeur approchée de b par S_{30} ; indiquer l'algorithme utilisé.

4- Soit B la base discrète d'ordre 1 définie au (3-) et soit t un élément de $[0, b]$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t - t_n \leq 2^{-n+1}$ et en déduire un majorant de $\dfrac{(e^t - e^{t_n})}{e^t}$. Vérifier que $e^{t_{n+1}}$, s'il n'est pas égal à e^{t_n}, s'en déduit en effectuant une division par une puissance de 2 et une addition.

Remarque : Dans les ordinateurs ou les calculettes électroniques, les nombres sont représentés en binaire. Une division par une puissance de 2 est donc réalisée par un décalage.

CARACTERISATION DES BASES DISCRETES D'ORDRE p

5- Soit $B = (b_n)$ un élément de S pour lequel il existe un nombre entier n_0 tel que $\sigma_{n_0} < b_{n_0}$.

Soit (d_n) une suite d'éléments de $\{0, 1\}$ et soit $t = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n.b_n$.

a) S'il existe un élément i_0 de $\{0, 1, \ldots, n_0\}$ tel que $d_{i_0} = 0$, montrer que $t \leq b - b_{n_0}$.

b) Si $d_i = 1$ pour tout i de $\{0, 1, \ldots, n_0)$, montrer que $t \geq S_{n_0} + t$.

c) En déduire que t n'appartient pas à l'intervalle $]S_{n_0} + \sigma_{n_0}, S_{n_0} + b_{n_0}[$.

6- Soit $B = (b_n)$ une base discrète d'ordre 1. Montrer (raisonnement par l'absurde) que le terme général b_n vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq \sigma_n$.

7- Soit p un nombre entier strictement positif et $B = (b_n)$ un élément de S. On introduit la suite $A = (a_n)$ définie par $a_n = b_{[n/p]}$ où $[n/p]$ est la partie entière du nombre rationnel n/p. La suite A est un élément de S et la série associée de terme général a_n a pour somme pb (vérifier ce dernier point).

Montrer que B est une base discrète d'ordre p si et seulement si A est une base discrète d'ordre 1.

8- Montrer que $B = (b_n)$ est une base discrète d'ordre p si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq p.\sigma_n$. Soit un nombre réel a strictement supérieur à un. Pour quels ordres la suite (a^{-n}) est-elle une base discrète ?

CONSTRUCTION DE BASES DISCRETES D'ORDRE p

9- Soient $B = (b_n)$ un élément de S, p un nombre entier strictement positif et f une application de $[0, pb]$ dans $\mathbb{R}$ telle que : f et sa dérivée f' sont continues, $f(0) = 0$, f est strictement croissante, f' est décroissante.

En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que $\forall\ t \in [0, pb]$, $tf'(t) \leq f(t) \leq tf'(0)$ et $f(t_0 + t_1) \leq f(t_0) + f(t_1)$ où t_0 et t_1 sont deux nombres positifs ou nuls tels que $t_0 + t_1 \leq pb$.

10- Soit $B = (b_n)$ une base discrète d'ordre p et f une application du type indiqué au (9-). Montrer que la suite $(f(b_n))$ est une base discrète d'ordre p. On prend la suite (a^{-n}) définie au (8-). Que peut-on conclure si on choisit les fonctions définies par $f(t) = \ln(1 + t)$ et $f(t) = \arctan t$?

—— *FIN* ——