Concours ENSI 1988 P

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

NOTATIONS, BUT DU PROBLEME. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels $x \geq 0$. Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{R}$. Si A est un ensemble fini, *card* A est le nombre d'éléments de A.

E désigne un espace euclidien. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $< x, y >$. On pose, pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$. Un vecteur unitaire de E est un vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, où n est un entier ≥ 1 , on prend pour $< ., . >$ le produit scalaire n usuel défini par $< (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
L'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ est noté S_n . II est rappelé que si deux vecteurs x et y sont des éléments de S_n , on a d'après l'inégalité de Schwarz, $-1 \leq < x, y > \leq 1$.

L'objectif du problème est l'étude de sous-ensembles finis A de S_2 ou S_3 tels que les produits scalaires de deux vecteurs de A, distincts l'un de l'autre, soient tous égaux , ou aient tous la même valeur absolue.

PARTIE I

On suppose, dans cette partie, que E est un espace euclidien de dimension 2. On considère une base orthonormale (e_1, e_2) de E. Pour tout θ, élément de $\mathbb{R}$; on désigne par r_θ la rotation de E définie par

$$r_\theta(e_1) = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2 \quad ,$$

et qui est donc telle que $r_\theta(e_2) = -(\sin\theta)e_1 + (\cos\theta)e_2$.

1. Soit α un réel vérifiant $-1 \leq \alpha \leq 1$, et soit $\theta = \arccos\alpha$.

1.a. Montrer que pour deux vecteurs unitaires x et y de E, les propriétés (i) et (ii) suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad < x, y >= \alpha \quad .$$
$$(ii) \; x = r_\theta(y) \; ou \; y = r_\theta(x) \quad .$$

1.b. On suppose qu'il existe des vecteurs unitaires x, y, z de E, distincts deux à deux, tels que $< x, y >=< y, z >=< z, x >= \alpha$. Montrer que $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ et que $\{x, y, z\} = \{x, r_\theta(x), r_\theta^2(x)\}$? . En déduire que si un vecteur unitaire $t \in E$ est tel que $< t, x >= \alpha$, alors $t = y$ ou $t = z$.

2. On pose $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$. Soit A un sous-ensemble fini de E tel que $cardA \geq 3$, et constitué de vecteurs unitaires de E. Montrer que les propriétés (i) et (ii) suivantes sont équivalentes :

(i) Quel que soit $(u, v, u', v') \in A^4$ verifiant $u \neq v$, $u' \neq v'$, on a $< u, v >=< u', v' >$.
(ii) Il existe un vecteur unitaire $\xi \in E$ tel que $A = \{\xi, r_\theta(\xi), r_\theta^2(\xi)\}$.

PARTIE II

Dans toute cette partie, on suppose que $E = \mathbb{R}^3$.

1. Soient k un entier et β un réel vérifiant $k \geq 4$ et $-1 \leq \beta \leq 1$. On suppose qu'il existe des vecteurs $u_1, \dots, u_k$ de S_3, deux à deux distincts, et tels que $< u_i, u_j >= \beta$ pour tout $(i, j), 1 \leq i < j \leq k$.

1.a. Montrer que $\beta \neq 1$ et que $\beta \neq -1$.

1.b. Montrer qu'il existe un, et un seul $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $i = 1, \dots, k-1$, u_k soit orthogonal à $u_i + \lambda u_k$. A quoi est égal λ ?

1.c. Pour tout $i = 1, \dots, k-1$ on pose $v_i = u_i + \lambda u_k$, où λ a la valeur trouvée en (II 1.b.). Déterminer la valeur des produits scalaires $< v_i, v_j >$ pour $1 \leq i \leq j \leq k-1$.

1.d. Montrer que les vecteurs $w_i, \dots, w_{k-1}$ tels que $w_i = \dfrac{v_i}{\|v_i\|}$, sont des vecteurs unitaires, deux à deux distincts, appartenant à un plan vectoriei $F \subset E$.
Vérifier que pour $1 \leq i < j \leq k-1$, on a $< w_i, w_j >= \dfrac{\beta}{1+\beta}$. En déduire que $\beta = \dfrac{-1}{3}$ et que $k = 4$ (on pourra utiliser le (I 2.)).

2. Soient G un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 et t un vecteur appartenant à S_3, orthogonal à G. On considère des vecteurs unitaires u, v, w de G tels que

$$< u, v >=< v, w >=< w, v >= \frac{-1}{2} .$$

Pour tout $(\mu, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on pose $A_{\mu,\nu} = \{t, (\mu u + \nu t), (\mu v + \nu t)(\mu w + \nu t)\}$. Déterminer les couples $(\mu, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} A_{\mu,\nu} \subset S_3 \\ \forall\ ((U, V) \in A_{\mu,\nu} \times A_{\mu,\nu} \text{ et } U \neq V) \quad < U, V >= \dfrac{-1}{3} \end{cases} .$$

PARTIE III

1. Pour tout entier $k \geq 2$, et pour tous réels a et b, on désigne par $P_k(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ dont tous les termes diagonaux sont égaux à a, et dont tous les termes non diagonaux sont égaux à b.

1.a. En utilisant par exemple une combinaison linéaire convenable des colonnes, puis des lignes de $P_k(a, b)$, montrer que le déterminant de $P_k(a, b)$ est égal à $[a + (k-1)b].(a-b)^{k-1}$.

1.b. Soient $u_1, \dots, u_k$, $k \geq 2$, des vecteurs unitaires, deux à deux distincts, d'un espace euclidien E. On suppose qu'il existe un réel c tel que $< u_i, u_j >= c$ pour tout couple d'entiers (i, j) vérifiant $1 \leq i < j \leq k$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des réels tels que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0$; montrer que $P_k(1, c).\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = 0$. En dédulre que si $c \neq 1$ et si $c \neq -\dfrac{1}{k-1}$ les vecteurs $u_1, \dots, u_k$ constituent une partie libre de E.

Jusqu'à la fin de la partie III, on suppose que $E = \mathbb{R}^3$. On considère un sous-ensemble fini B de S_3 , tel que *card* $B = 4$: $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, et tel que $< u_i, u_j >= \dfrac{-1}{3}$ quel que soit le couple d'entiers (i, j) vérifiant $1 \leq i < j \leq 4$.

2. Montrer que trois vecteurs de B, deux à deux distincts, constituent une base de E. Quelles sont les composantes du vecteur u_4 dans la base (u_1, u_2, u_3).

3. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un, et un seul $(m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} m_i = 1$ et $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} m_i u_i$.

4. On désigne par T l'ensemble des $x \in E$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{4} m_i u_i \ , \ avec \ \sum_{i=1}^{4} m_i = 1 \ et \ (m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{R}^{+4} \ .$$

Soit f un automorphisme orthogonal de E; on se propose de démontrer que les propriétés (i) et (ii) suivantes sont équivalentes : $(i) f(B) = B$, $(ii) f(T) = T$.

4.a. Montrer que (i) entraine (ii).

4.b. On suppose la propriété (ii) vérifiée. Soient $u \in B$ et $v = f(u)$; pourquoi v est-il élément de T ? On pose $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} m_i u_i$, avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} m_i = 1$ et $(m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{R}^{+4}$.

Montrer que $\|v\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} m_i^2 - \frac{2}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} m_i m_j$. Calculer $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{4} m_i\right)^2 - \|v\|^2$.

montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq 4} m_i m_j = 0$. En déduire qu'i1 existe $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $m_i = 1$ et $m_j = 0$ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \neq i$. Conclure.

5. On désigne par ϑ le groupe des bijections de B sur B. Soit $\sigma \in \vartheta$.

5.a. Montrer qu'il existe un endomorphisme et un seul $\overline{\sigma}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E tel que $\overline{\sigma}(u_i) = \sigma(u_i)$ pour tout $i = 1, 2, 3$ (on pourra utiliser le (III 2.)).

5.b. Montrer que $\overline{\sigma}$ est un automorphisme orthogonal de E.

5.c. En remarquant que $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$, montrer que $\overline{\sigma}(u_i) = \sigma(u_i)$ pour tout $i = 1, 2, 3, 4$.

5.d. Montrer que l'ensemble ζ des sutomorphismes orthogonaux g de E tels que $g(T) = T$ est un sous-groupe du groupe orthogonal de E. Utiliser ce qui précède pour montrer que l'application qui à $g \in \zeta$ associe la restriction de g à B , est un isomorphisme de groupes de ζ sur ϑ. A quoi est égal *card* ζ ?

5.e. Pour tous $i, j = 1, 2, 3, 4$, $i \neq j$,on désigne par H_{ij} le plan vectoriel orthogonal à $(u_i - u_j)$, et par τ_{ij} la symétrie orthogonale par rapport à H_{ij}. Utiliser l'isomorphisme entre ζ et ϑ pour montrer que tout élément de ζ est l'application composée d'un nombre fini de τ_{ij}.

PARTIE IV

On se propose d'étudier les parties C de $E = \mathbb{R}^3$ telles que :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} C \subset S_3 \ , \\ \forall \ ((U,V,U',V') \in C^4 \ , \ U \neq V \ , \ U' \neq V') \quad | < U,V > | = | < U',V' > | \ . \end{array} \right.$$

1. On considère un plan vectoriel $G \subset E$ et un vecteur t de S_3 orthogonal à G. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 \leq \gamma < 1$; on sait qu' il existe des vecteurs unitaires u_1 et u_2 appartenant à G, tels que $< u_1, u_2 >= \gamma$.

1.a. Déterminer des réels φ, ψ, η tels que $u_3 = \varphi u_1 + \psi u_2 + \eta t$ vérifie $\|u_3\| = 1$, $< u_1, u_3 >= \gamma$, $< u_2, u_3 >= \gamma$.

1.b. On pose $s = \dfrac{2\gamma}{1-\gamma}$. On considère un vecteur u_3 de E vérifiant les conditions du (IV 1.a.); montrer qu'il existe un et un seul réel ω tel que les vecteurs $v_i = \omega(u_1 + u_2 + u_3) - su_i$, $i = 1, 2, 3$, vérifient $< v_i, u_i >= -\gamma$ et $< v_i, u_j >= \gamma$ si $i \neq j$. Déterminer γ pour que ces vecteurs v_1, v_2, v_3 soient unitaires et montrer qu'alors l'ensemble $(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)$ remplit les conditions $(*)$.

2. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $\mathcal{S}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit l'application Φ de $\mathcal{S}$ dans $E \times E$ définie par :

$$\Phi \ : \ \begin{pmatrix} a & a' & b' \\ a' & b & c' \\ b' & c' & c \end{pmatrix} \longrightarrow [(a,b,c),(a',b',c')]$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (on ne demande pas d'établir ces dernières propriétés).

2.a. Montrer qu'on définit un produit scalaire $[.,.]$ sur $E \times E$ en posant

$$[(X,X'),(Y,Y')] =< X,Y > +2 < X',Y' > \ .$$

2.b. On note $tr\ M$ la trace d'une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ ($tr\ M$ est la somme des éléments diagonaux de M). Montrer que si M et N sont deux matrices appartenant à $\mathcal{S}$ on a

$$tr\ (MN) = [\Phi(M), \Phi(N)] \ .$$

En déduire qu'on définit un produit scalaire $(./.)$ sur $\mathcal{S}$ en posant $(M/N) = tr\ (MN)$ pour tout couple (M, N) de matrices de $\mathcal{S}$.

3. Soit $\delta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta < 1$ et soient $U_1, \ldots, U_k$ des vecteurs appartenant à S_3, tels que $< U_1, U_2 >= \delta$ pour tous $i, j = 1, \ldots, k$, $i \neq j$. Pour tout $i = 1, \ldots, k$ on désigne par π_i l'endomorphisme de E défini par $\pi_i(e) =< e, U_i > U_i$, et par M_i la matrice de π_i dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de E.

3.a. Soit $(i, j, \ell) \in (1, \ldots, k) \times (1, \ldots, k) \times (1, 2, 3)$. Calculer $< \pi_i \circ \pi_j(e_\ell), e_\ell >$; montrer que $tr\ (M_i M_i) = 1$ et $tr\ (M_i M_j) = \delta^2$ si $i \neq j$.

3.b. Déduire de ce qui précède que toute partie C de E satisfaisant $(*)$ est telle que $card\ C \leq 6$ (on pourra utiliser le (III 1.b.)).

——— $\mathcal{FIN}$ ———