

Concours ENSI 1988 M

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

Nous étudions des propriétés associées aux translations et aux dérivées partielles (partie I). Nous construisons une classe de fonctions (partie II). A partir d'un exemple, nous montrons que la résolution d'une équation aux dérivées partielles, posée dans le plan, peut se ramener à celle d'une équation fonctionnelle, posée dans un intervalle réel (parties III et IV). Nous établissons des estimations en fonction de la donnée (partie V).

On désigne par \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels, par \mathbb{R}^2 l'ensemble des couples de nombres réels.

Soit $a = (a_1, a_2)$ un élément de \mathbb{R}^2 , τ_a représente la translation de vecteur a ; c'est-à-dire l'application qui à $x = (x_1, x_2)$ associe : $\tau_a(x) = a + x = (a_1 + x_1, a_2 + x_2)$.

Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^2 et $k \geq 0$ un entier, on note $\mathcal{C}^k(\mathcal{U})$ l'ensemble des applications de \mathcal{U} dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^k .

I. PROPRIÉTÉS ASSOCIÉES AUX TRANSLATIONS, AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

1. On désigne par $a = (a_1, a_2)$ un élément donné de \mathbb{R}^2 .

1.a. Montrer que τ_a est une bijection continue de \mathbb{R}^2 sur lui-même.

1.b. Quelle est la bijection réciproque ?

2. Etant donné un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 , on note Ω_a le translaté de Ω par τ_a . Montrer que Ω_a est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Etant donné une application f de Ω dans \mathbb{R} , on note $\tau_a f$ l'application translatée de f par τ_a ; c'est-à-dire l'application qui à $x \in \Omega_a$ associe $f(x - a) = f(x_1 - a_1, x_2 - a_2)$.

3. On suppose que $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Montrer que $\tau_a f \in \mathcal{C}^0(\Omega_a)$. Les dérivées partielles par rapport à la première variable et la deuxième variable sont notées respectivement ∂_1 et ∂_2 .

4. On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Montrer que $\tau_a f \in \mathcal{C}^1(\Omega_a)$ et que pour $i \in \{1, 2\}$, on a : $\partial_i \tau_a f = \tau_a \partial_i f$

5. On suppose que $f \in \mathcal{C}^3(\Omega)$ et on lui associe la fonction $\delta_a f$ définie sur Ω_a par : $\delta_a f = a_1 \tau_a \partial_1 f + a_2 \tau_a \partial_2 f$.

5.a. Admettre que pour $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$, on a : $\partial_i \partial_j g = \partial_j \partial_i g$, pour $g \in \mathcal{C}^2$. Montrer que pour $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$, on a : $\partial_i \partial_j \delta_a f = \delta_a \partial_j \partial_i f$.

5.b. $\delta_a f$ est-elle de classe \mathcal{C}^2 ?

II. CONSTRUCTION D'UNE CLASSE DE FONCTIONS.

1. On introduit l'intervalle I et l'ouvert B définie respectivement par :

$$\begin{aligned} I &= \{t; 0 \leq t \leq 2\pi\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1\}. \end{aligned}$$

Soit φ l'application définie par : $B \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
 $(x, t) \longmapsto (x_1 - \cos t, x_2 - \sin t)$

1.a. Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^2 .

1.b. Montrer que l'image de φ est contenue dans l'ouvert suivant : $B' = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$.

1.c. L'image de φ est-elle égale à B' ?

Dans toute la suite, on désigne par Ω l'ouvert : $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

2. Soit α l'application définie par : $I \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
 $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$

A toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, on associe l'application τf de $B \times I$ dans \mathbb{R} , définie par :

$$\tau f(x, t) = \tau_{\alpha(t)} f(x).$$

Montrer que τf est continue sur $B \times I$.

3. A toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, on associe l'application δf de $B \times I$ dans \mathbb{R} , définie par :

$$\delta f(x, t) = \delta_{\alpha(t)} f(x).$$

3.a. On suppose que $(f, g) \in \mathcal{C}^1(\Omega) \times \mathcal{C}^1(\Omega)$. Montrer que $\delta(f + g) = \delta f + \delta g$.

3.b. On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Montrer que pour $i \in \{1, 2\}$ on a : $\partial_i \delta f = \delta \partial_i f$.
 Montrer que δf est de classe \mathcal{C}^1 .

3.c. On suppose que $f \in \mathcal{C}^3(\Omega)$. Montrer que pour $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$ on a : $\partial_i \partial_j \delta f = \delta \partial_i \partial_j f$.
 Montrer que δf est de classe \mathcal{C}^2 .

4. Soit $w \in \mathcal{C}^3(\Omega)$ et g une application de I dans \mathbb{R} , continue. On note u l'application de B dans \mathbb{R} , définie par :

$$u(x) = \int_0^{2\pi} g(t) \delta w(x, t) dt .$$

4.a. Montrer que pour $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$ on a :

$$\partial_i \partial_j u(x) = \int_0^{2\pi} g(t) \delta \partial_i \partial_j w(x, t) dt .$$

4.b. On suppose que l'on a dans Ω : $\partial_1 \partial_1 w + \partial_2 \partial_2 w = 0$.
 Montrer que l'on a dans B : $\partial_1 \partial_1 u + \partial_2 \partial_2 u = 0$.

5. On note \ln le logarithme népérien. On choisit pour w la fonction définie par :
 $w(x) = -\ln[r(x)]$ avec : $r(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

5.a. Montrer que $w \in \mathcal{C}^3(\Omega)$.

5.b. Pour $i \in \{1, 2\}$, exprimer $\partial_i r$ et $\partial_i \partial_i r$ en fonction de x et de r .

5.c. Montrer que dans Ω on a : $\partial_1 \partial_1 w + \partial_2 \partial_2 w = 0$.

III. ÉTUDE DE VALEURS AU BORD.

On désigne par w l'application définie à la question (II-5) et par u l'application introduite à la question (II-4).

A tout élément $x \in B \setminus \{0\}$ on associe le couple unique $(\rho, \theta) \in]0, 1[\times]0, 2\pi[$ défini par :

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos \theta \\ x_2 = \rho \sin \theta \end{cases}$$

1.a. Soit $x \in B \setminus \{0\}$ et $t \in I$, calculer $\delta w(x, t)$ en fonction de ρ et $\cos(\theta - t)$. On note $K(\rho, \theta, t)$ l'expression trouvée.

1.b. On suppose $\theta \neq t$. Montrer que lorsque ρ tend vers 1 , $K(\rho, \theta, t)$ admet une limite indépendante de θ et de t .

2. Pour tout $(\rho, \theta, t) \in]0, 1[\times]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$ on pose :

$$N(\rho, \theta, t) = K(\rho, \theta, t) - \frac{1}{2} .$$

2.a. Montrer que :

$$N(\rho, \theta, t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \rho^2}{\rho^2 - 2\rho \cos(\theta - t) + 1} .$$

Quel est le signe de N ?

2.b. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} N(\rho, \theta, t) dt .$$

Est-elle dépendante de ρ et de θ ?

3. Soit $t_0 \in]0, 2\pi[$; on se propose de montrer que :

$$\int_0^{2\pi} N(\rho, \theta, t) g(t) dt \longrightarrow \pi g(t_0)$$

lorsque : $(\rho, \theta) \longrightarrow (1, t_0)$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

3.a. Montrer que : $\int_0^{2\pi} N(\rho, \theta, t) g(t) dt - \pi g(t_0) = \int_0^{2\pi} N(\rho, \theta, t) [g(t) - g(t_0)] dt$.

3.b. Montrer que l'on peut trouver $n > 0$ tel que :

$$- n < \min(t_0, 2\pi - t_0),$$

$$- (\forall t \in I) (|t - t_0| \leq n) \Rightarrow |g(t) - g(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} .$$

On suppose n ainsi choisi.

3.c. Montrer que :

$$\left| \int_{t_0-n}^{t_0+n} N(\rho, \theta, t)[g(t) - g(t_0)]dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

3.d. Montrer que pour tout $(\theta, t) \in [0, 2\pi[\times I$ on a :

$$\begin{aligned} - (|\theta - t| \geq \frac{n}{2}) &\Rightarrow \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - t) + 1 \geq \sin^2 \frac{n}{2}. \\ - (|t - t_0| \geq n \text{ et } |\theta - t_0| \leq \frac{n}{2}) &\Rightarrow |\theta - t| \geq \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

3.e. Etablir que pour tout $(\rho, \theta) \in]0, 1[\times [0, 2\pi[$

$$|\theta - t_0| \leq \frac{n}{2} \Rightarrow \int_0^{t_0-n} N(\rho, \theta, t)[g(t) - g(t_0)]dt + \int_{t_0+n}^{2\pi} N(\rho, \theta, t)[g(t) - g(t_0)]dt \leq \frac{2\pi}{\sin^2 \frac{n}{2}} |g|_\infty (1 - \rho^2)$$

où $|g|_\infty = \sup\{|g(t)|; t \in [0, 2\pi[\}$.

3.f. Conclure.

4. Dédurre de la question précédente que

$$u(x) \longrightarrow \pi g(t_0) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} g(t)dt$$

lorsque $x \longrightarrow (\cos t_0, \sin t_0)$.

IV. RÉOLUTION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE.

Etant donné une fonction F de $I = [0, 2\pi]$ dans \mathbb{R} , continue ; on considère l'équation :

$$(E) \quad \pi g + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} g(t)dt = F,$$

l'inconnue étant une fonction g de I dans \mathbb{R} , continue.

1. Chercher une solution de (E) avec la forme $\lambda F + \mu$ où les nombres réels λ et μ sont à déterminer.

2. Montrer que (E) admet une solution unique.

3. On obtient B comme en (II.1). Montrer que l'on peut construire une fonction u de B dans \mathbb{R} telle que :

- 1) $\partial_1 \partial_1 u + \partial_2 \partial_2 u = 0$ dans B
- 2) $(\forall t_0 \in]0, 2\pi[), u(x) \longrightarrow F(t_0)$
lorsque $x \longrightarrow (\cos t_0, \sin t_0)$.

V. ESTIMATION EN FONCTION DE LA DONNÉE.

Etant donné :

- une fonction définie sur $I = [0, 2\pi]$ à valeurs réelles et continue.
- un nombre réel $p > 1$; on note :

$$|f|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} .$$

De même, on note : $|f|_\infty = \sup\{|f(t)|; t \in [0, 2\pi]\}$.

Soit N l'expression introduite en (III-2) ; on note :

$$v(\rho, \theta) = \int_0^{2\pi} N(\rho, \theta, t)g(t)dt .$$

1. Montrer que l'on a les estimations :

1.a. $|v(\rho, \theta)| \leq \pi|g|_\infty .$

1.b. $|v(\rho, \theta)| \leq \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(1-\rho)^{\frac{1}{2}}}|g|_2 .$

2.a. Etant donné deux nombres réels strictement positifs λ et μ , tels que : $\lambda + \mu = 1$ montrer que pour tout couple de nombres réels strictement positifs (a, b) , on a l'inégalité : $a^\lambda b^\mu < \lambda a + \mu b$ (On utilisera la convexité de la fonction : $x \mapsto -\ln x$) .

2.b. En déduire que pour tout couple de nombres réels strictement positifs (α, β) , on a :

$$\alpha\beta < \lambda\alpha^{1/\lambda} + \mu\beta^{1/\mu} .$$

2.c. Soit p et q deux nombres réels > 1 tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ choisir dans la question précédente

$$\lambda = \frac{1}{p}, \mu = \frac{1}{q}, \alpha = \frac{|f(t)|}{|f|_p}, \beta = \frac{|g(t)|}{|g|_q} .$$

En déduire que :

$$\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt \leq |f|_p|g|_q .$$

3. Montrer que pour $q \in]1, +\infty[$ on a l'estimation :

$$|v(\rho, \theta)| \leq \frac{\pi^{1-\frac{1}{q}}}{(1-\rho)^{\frac{1}{q}}}|g|_q .$$