Concours ENSI 1988 TA

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

Notations :

• $\mathcal{M}_2$ désigne l'espace vectoriel, sur le corps des réels, des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On choisit dans $\mathcal{M}_2$ la base $\mathcal{B}$ constituée des quatre matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Pour toute matrice X de $\mathcal{M}_2$ de la forme $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$ on a $X = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 + x_4E_4$.

• u_1, u_2, u_3, u_4 désignant quatre matrices de $\mathcal{M}_2$, on représentera par $\begin{pmatrix} u_1 & \vdots & u_3 \\ \cdots & & \cdots \\ u_2 & \vdots & u_4 \end{pmatrix}$ matrice carrée d'ordre 4 obtenue en remplaçant les matrices u_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ par leurs éléments.

On admettra les propriétés suivantes :

- si $U = \begin{pmatrix} u_1 & \vdots & u_3 \\ \cdots & & \cdots \\ u_2 & \vdots & u_4 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} v_1 & \vdots & v_3 \\ \cdots & & \cdots \\ v_2 & \vdots & v_4 \end{pmatrix}$ (où les matrices u_i et v_i éléments de $\mathcal{M}_2$), et $\lambda \in \mathbb{R}$,

alors $U+V = \begin{pmatrix} u_1+v_1 & \vdots & u_3+v_3 \\ \cdots & & \cdots \\ u_2+v_2 & \vdots & u_4+v_4 \end{pmatrix}$, $\lambda U = \begin{pmatrix} \lambda u_1 & \vdots & \lambda u_3 \\ \cdots & & \cdots \\ \lambda u_2 & \vdots & \lambda u_4 \end{pmatrix}$ et $U.V = \begin{pmatrix} u_1v_1 + u_3v_2 & \vdots & u_1v_3 + u_3v_4 \\ \cdots & & \cdots \\ u_2v_1 + u_4v_2 & \vdots & u_2v_3 + u_4v_4 \end{pmatrix}$

- si $U = \begin{pmatrix} u_1 & \vdots & u_3 \\ \cdots & & \cdots \\ u_2 & \vdots & u_4 \end{pmatrix}$ et si $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \cdots \\ w_2 \end{pmatrix}$ alors $U.W = \begin{pmatrix} u_1w_1 + u_3w_2 \\ \cdots \\ u_2w_1 + u_4w_2 \end{pmatrix}$

(où u_i et w_i éléménts de $\mathcal{M}_2$).
W et $U.W$ sont alors des matrices (4, 2) (. désigne le produit habituel des matrices).

PARTIE I

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2$; on désigne par F l'application qui, à toute matrice X de $\mathcal{M}_2$, associe la matrice $F(X) = A.X.B$.

1. Montrer que F est une application linéaire de $\mathcal{M}_2$ dans lui-même.

2. $\mathcal{M}_2$ étant rapporté à la base $\mathcal{B}$, on désigne par $A \otimes B$ la matrice associée à l'application F.

On pose $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix}$. Montrer que l'on a : $A \otimes B = \begin{pmatrix} b_1A & \vdots & b_3A \\ \cdots & & \cdots \\ b_2A & \vdots & b_4A \end{pmatrix}$.

3. Démontrer les propriétés suivantes. Quelles que soient les matrices A, B, P, Q de $\mathcal{M}_2$:
a. $A \otimes (P+Q) = A \otimes P + A \otimes Q$;
b. $(A+B) \otimes P = A \otimes P + B \otimes P$;
c. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \lambda(A \otimes B) = \lambda A \otimes B = A \otimes \lambda B$;
d. $(P \otimes Q).(A \otimes B) = (P.A) \otimes (B.Q)$.

On pourra :
- pour démontrer a, b, c, utiliser les applications linéaires associées à $A \otimes P$, à $A \otimes Q$, etc ... ;
- pour démontrer d, utiliser directement les matrices.

4. On désigne par $det(M)$ le déterminant d'une matrice carrée M quelconque. Calculer $det(A \otimes I)$, $det(I \otimes A)$ et $det(A \otimes B)$ en fonction de $det(A)$ et $det(B)$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.a. Montrer que si P et Q sont des matrices de $\mathcal{M}_2$ régulières, alors $P \otimes Q$ est régulière et déterminer $(P \otimes Q)^{-1}$.

b. Montrer que si D et Δ sont deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_2$, alors $D \otimes \Delta$ est aussi diagonale (donner les éléments diagonaux de $D \otimes \Delta$) .

c. Montrer que si A et B sont deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2$, alors $A \otimes B$ est diagonalisable. (On pourra utiliser les propriétés précédentes ainsi que les propriétés de la question 3.)

6.a. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_2$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix}$ telle que $b_1 + b_2 = b_3 + b_4$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2$. X_1 étant un vecteur propre de A, associé à la valeur propre λ , montrer que $\begin{pmatrix} X_1 \\ \cdots \\ X_1 \end{pmatrix}$, est alors un vecteur propre de $A \otimes B$. Déterminer la valeur propre associée à ce vecteur propre.

b. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Ecrire la matrice $A \otimes B$. Déterminer les éléments propres de la matrice A. En déduire deux vecteurs propres de la matrice $A \otimes B$, préciser la valeur propre associée à chacun d'eux. Calculer le polynôme caractéristique de $A \otimes B$, déterminer les quatre valeurs propres de $A \otimes B$.

PARTIE II

$\mathcal{L}$ désigne l'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{M}_2$ dans lui-même.

1. Soient B_1 , B_2 , B_3 , B_4 quatre matrices non nulles de $\mathcal{M}_2$. On leur associe l'élément H de $\mathcal{L}$ défini par : $\forall X \in \mathcal{M}_2\ ,\ H(X) = \sum_{i=1}^{4} E_i.X.B_i$.

Soit $\widehat{H}$ la matrice carrée associée à l'application H relativement à la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2$.

On note $\widehat{H} = \begin{pmatrix} u_1 A & \vdots & u_3 A \\ \cdots & & \cdots \\ u_2 A & \vdots & u_4 A \end{pmatrix}$ et $B_i = \begin{pmatrix} b_1^i & b_3^i \\ b_2^i & b_4^i \end{pmatrix}$.

Exprimer les matrices u_j $(1 \leq j \leq 4)$ à l'aide des matrices E_i $(1 \leq i \leq 4)$ et des éléments des matrices B_i $(1 \leq i \leq 4)$.

2. Montrer que, pour tout endomorphisme L de $\mathcal{L}$, il existe un unique quadruplet (B_1, B_2, B_3, B_4) de $\mathcal{M}_2^4$ tel que : $\forall X \in \mathcal{M}_2$, $L(X) = \sum_{i=1}^{4} E_i.X.B_i$ (où de façon équivalente $\widehat{L} = \sum_{i=1}^{4} E_i \otimes B_i$).

On dira alors que (B_1, B_2, B_3, B_4) sont les "composantes" de L.

3.a. Soit T l'élément de $\mathcal{L}$ qui, à toute matrice X de $\mathcal{M}_2$, associe sa transposée $T(X)$. Quelle est la matrice $\widehat{T}$ associée à T relativement à la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2$? Déterminer les "composantes" de T, c'est-à-dire les matrices B_i $(1 \leq i \leq 4)$ telles que $\widehat{T} = \sum_{i=1}^{4} E_i \otimes B_i$.

b. Déterminer les "composantes" de l'identité $\beth$ (qui, à toute matrice X associe la matrice X) . En déduire les "composantes" des applications S et Z de $\mathcal{M}_2$ définies ainsi :

$$S \ : \ X \rightarrow \frac{X + T(X)}{2} \quad et \quad Z \ : \ X \rightarrow \frac{X - T(X)}{2} \ .$$

4. Reconnaître l'application de $\mathcal{L}$ dont les "composantes" sont $(0, E_1 + E_4, E_1 + E_4, 0)$ puis celle dont les "composantes" sont $(E_2 + E_3, 0, 0, E_2 + E_3)$.

PARTIE III

Dans cette partie, on identifie les espaces $\mathcal{M}_2$ et $\mathbb{R}^4$. Toute matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2$ est identifiée à l'élément de $\mathbb{R}^4$: $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 + x_4E_4$.

A

A toute matrice X on associe son déterminant $det(X)$. On définit ainsi une application Δ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que Δ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$.
Quelle est la matrice associée à Δ relativement à la base $\mathcal{B}$? Quel est le rang de Δ ?
Soit δ la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique Δ. Exprimer $\delta(X, Y)$ en fonction de $tr\ X$, $tr\ Y$ et $tr\ XY$ (où $tr\ X$ désigne la trace de la matrice X).

2. On se propose de déterminer les formes quadratiques non nulles sur $\mathbb{R}^4$ qui vérifient $\Phi(X.Y) = \Phi(X)\Phi(Y)$ pour tout couple (X, Y) de matrices de $\mathcal{M}_2$.
Démontrer les propriétés suivantes :
a. $\Phi(I) = 1$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
b. Si X est régulière, $\Phi(X)$ est non nul ;
c. Si X est singulière, $\Phi(X) = 0$.
On pourra, pour cela, montrer qu'il existe, lorsque le rang de X est 1 , deux matrices régulières P et Q de $\mathcal{M}_2$ telles que : $P.X.Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d. En considérant les deux équations en λ : $\Phi(X + \lambda I) = 0$ et $\Delta(X + \lambda Y) = 0$,
montrer que l'on a : $\Phi = \Delta$.

B

Soit Q l'application définie sur $\mathcal{M}_2$ par $Q\ :\ X \mapsto det(X) - \frac{1}{4}(tr\ X)^2$.

1. Montrer que Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$. Ecrire la matrice associée à Q relativement à la base $\mathcal{B}$.

Soit f la forme bilinéaire symétrique associée à Q . Ecrire $f(X,Y)$ pour toute matrice X et Y de $\mathcal{M}_2$. Montrer que $f(X,Y) = \frac{1}{4}(tr\ Xtr\ Y) - \frac{1}{2}tr\ (XY)$.

2. Montrer l'équivalence suivante : $Q(X) = 0 \Leftrightarrow X$ a une valeur propre double.
L'ensemble $\{X \in \mathcal{M}_2/Q(X) = 0\}$ est appelé *le cône isotrope* de Q.

3. L'ensemble $\{X \in \mathcal{M}_2/\ \forall Y \in \mathcal{M}_2\ ,\ f(X,Y) = 0\}$ est appellé *noyau* de f, application bilinéaire associée à Q.
Montrer que le noyau de f est l'ensemble des matrices scalaires ($\lambda I\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$)de $\mathcal{M}_2$.

4. On fait dans $\mathbb{R}^4$ le changement de coordonnées défini par : $X_1 = \frac{x_2 + x_3}{2}$, $X_2 = \frac{x_1 - x_4}{2}$, $X_3 = \frac{x_1 + x_4}{2}$ et $X_4 = \frac{x_2 - x_3}{2}$. (X_1, X_2, X_3, X_4)sont les coordonnées de X dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

a. Exprimer, dans cette base, $det(X)$, $tr\ X$ et $Q(X)$.

b. On considère $\mathcal{M}'_2$, la partie de $\mathcal{M}_2$, constituée des matrices de trace donnée t , toujours rapportée à la base $\mathcal{B}$.

A chaque matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$ (avec $t = x_1 + x_4$), on associe un point M de l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$: $X \mapsto M$ de coordonnées (X_1, X_2, X_4).

(i) Quelle est l'image de l'ensemble des matrices symétriques ?

(ii) L'image du cône isotrope de Q est une surface qu'on précisera et qui sépare l'espace en deux régions. Caractériser ces régions par rapport aux valeurs propres des X correspondants.

(iii) Quelle est l'image des matrices singulières de $\mathcal{M}'$? On représentera chacun des ensembles obtenus, dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

——— $\mathcal{FIN}$ ———