

# Concours ENSI 1988 TA

## PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

### PARTIE I

Soit, pour  $x$  réel et  $n$  entier naturel, les termes généraux des séries de fonctions :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^x} \quad \text{et} \quad v_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^x} \ln(2n+1).$$

On note  $f$  et  $g$  respectivement les sommes de séries :  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  et  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$ .

1) Etudier le domaine de définition de la fonction  $f$ , en précisant le domaine d'absolue convergence de la série qui définit cette fonction.

2) Soit  $a$  un réel strictement positif, montrer que la convergence de la série de fonctions de terme général  $u_n(x)$  est uniforme sur  $[1+a, +\infty[$ . Qu'en déduit-on pour la fonction  $f$  ?

3) Soit  $b$  un réel strictement compris entre 0 et 1, étudier si la convergence de la série de fonctions de terme général  $u_n(x)$  est uniforme sur  $[b, 1+a]$ .

4) Etudier de la même façon le domaine de définition de la fonction  $g$  et déterminer les intervalles où la convergence est uniforme.

Déduire des calculs précédents un domaine où  $f$  est dérivable et donner une expression de  $f$  sur ce domaine.

### PARTIE II

1) Etudier l'existence d'une limite pour  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

2) Calculer  $f(1)$  en remarquant que :  $\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n} dt$ .

(On pourra écrire :  $f(1) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(1)$ ).

3) Déterminer les valeurs approchées à  $10^{-4}$  près de  $f(3)$  et de  $f(5)$  et une valeur approchée de  $f(\frac{1}{2})$  à  $10^{-1}$  près.

(On indiquera dans chacun des cas le nombre de termes de la série calculés).

4) Pour  $x$  supérieur ou égal à 1, déterminer les variations de  $f$ . Donner l'allure de la courbe représentative de  $f$ .

## PARTIE III

Soit  $F_t(x)$  la fonction impaire,  $2\pi$  périodique définie par les relations :  $F_t(0) = F_t(\pi) = 0$  et  $F_t(x) = \cosh(tx)$  pour  $x$  dans  $]0, \pi[$ .

- 1) Déterminer les coefficients de Fourier  $a_0/2$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2) Préciser pour  $x$  dans  $[0, \pi]$  la somme de la série de Fourier.
- 3) En déduire pour  $x = \pi/2$ , une expression de  $\frac{1}{\cosh(\frac{\pi t}{2})}$  sous forme de série.
- 4) Justifier les égalités :

$$\forall t \in ]0, +\infty[ , \frac{1}{\cosh t} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t}$$

$$\text{et } \forall t \in ]0, +\infty[ , \frac{1}{\cosh t} = 2 \sum_{k=0}^N (-1)^k e^{-(2k+1)t} + 2(-1)^{N+1} \frac{e^{-(2N+3)t}}{1 + e^{-2t}} .$$

- 5) Etudier la convergence de  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\cosh t} dt = g(x)$  et calculer les intégrales  $I_k$  :

$$I_k = \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt \text{ avec } k \in \mathbb{N}.$$

6) En multipliant par  $\cos(xt)$  le développement en série du 4) et en utilisant également l'autre égalité, montrer que l'on peut intégrer terme à terme la série obtenue entre 0 et  $+\infty$ . Donner une expression de  $G(x)$  sous forme de série et en déduire la valeur de  $G(x)$ .

## PARTIE IV

On donne  $\frac{1}{\cosh(\frac{\pi}{2}x)} = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2p+1}{(2p+1)^2 + x^2} = g(x)$  pour  $x$  dans  $\mathbb{R}$ .

- 1) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1$   $\frac{\pi}{4} g(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p} x^{2n}}{(2p+1)^{2n+1}} \right)$ .

2) On admet qu'il est légitime de permuter l'ordre des deux sommations par rapport aux indices  $p$  et  $n$ .

En déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1$   $\frac{\pi}{4} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T_n x^{2n}$  avec  $T_n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^{2n+1}} = f(2n+1)$ .

- 3) Déterminer alors les valeurs exactes de  $f(3)$  et de  $f(5)$ .
- 4) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(2n+1) = \pi^{2n+1} q_n$ , où  $q_n$  est un rationnel.

## PARTIE V

- 1) Etudier la convergence des intégrales  $J_k = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2k}}{\cosh t} dt$ .
- 2) Appliquer l'inégalité de Taylor à la fonction  $y \mapsto \cos(y)$  à l'ordre  $2N + 2$ . En déduire que :

$$G(x) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{\cosh t} dt + R_N(x) \text{ avec } |R_N(x)| \leq \frac{|x|^{2N+2}}{(2N+2)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2N+2}}{\cosh t} dt .$$

- 3) Justifier l'inégalité :  $\forall t \geq 1 \quad \cosh t \geq \frac{t^{2N+4}}{(2N+4)!}$ .

En déduire :  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1, \lim_{N \rightarrow +\infty} |R_N(x)| = 0$ . Soit  $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} J_k$  pour  $|x| < 1$ .

- 4) Déterminer en fonctions des données du problème la valeur des intégrales  $J_k$ .
- 5) Donner le rayon de convergence de la série entière obtenue en 3).

———— FIN ————