CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT
DE L'ENSEIGNEMENT AGRICOLE
CAPESA SESSION 2001

Concours EXTERNE
DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Coefficient : 2,5 Durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisée.

Problème 1

1.Notations et préliminaires.

• E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $L(E)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. On notera id_E l'identité de E, O_E le vecteur nul de E et $O_{L(E)}$ l'endomorphisme nul de E.

• v étant un endomorphisme non nul de E et k étant un entier naturel, on définit v^k par : $v^0 = id_E$ et $v^{k+1} = v^k o v$.

• Un endomorphisme v de E est nilpotent d'indice $m \in \mathbb{N}^\star$ si $v^{m-1} \neq 0_{L(E)}$ et $v^m = 0_{L(E)}$.

• f étant un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel F, on désigne par $Ker(f)$ le noyau de f.

• Si F est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, on notera $dim(F)$ la dimension de F.

• u étant un endomorphisme de E, on désigne par φ_u l'application définie sur $L(E)$ par : $\forall v \in L(E), \varphi_u(v) = u \circ v - v \circ u$.

L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés de l'application φ_u , en particulier la diagonalisation de u et de φ_u.

1.1. Vérifier que, pour tout endomorphisme u de E, φ_u est un endomorphisme de $L(E)$.

1.2. Pour tout nombre complexe λ, déterminer $\varphi_{\lambda.id_E}$.

1.3. Montrer que, pour tout endomorphisme u de E, $dim(Ker(\varphi_u)) \geq 2$.

2. Etude d'un exemple.
Dans cette partie, on suppose que $n = 2$ et on désigne par $B = (e_1; e_2)$ une base de E.
Soit u l'endomorphisme de E tel que $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ soit la matrice de u relativement à la base B.

2.1. u est-il un endomorphisme diagonalisable ?
On considère M_1, M_2, M_3 et M_4 les matrices carrées à coefficients complexes d'ordre 2 définies par : $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on désigne par θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4 les

endomorphismes de E dont les matrices relativement à la base B sont respectivement M_1, M_2, M_3 et M_4 . Ainsi $C = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ est une base de $L(E)$.

2.2. Déterminer la matrice Δ de φ_u relativement à la base C.

2.3. φ_u est-il diagonalisable ? Préciser les valeurs propres non nulles de φ_u et la dimension de $Ker(\varphi_u)$.

2.4. Déterminer le sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de φ_u.

3. Etude du cas où u est diagonalisable.
Dans cette partie, on suppose que u est un endomorphisme diagonalisable de E. On désigne par $(\varepsilon_j)_{1 \le j \le n}$ une base de E constituée de vecteurs propres de u. Pour tout $(i; j) \in [1; n]^2$, on définit l'endomorphisme $v_{i,j}$ de E par :

$$v_{i,j}(\varepsilon_i) = \varepsilon_j \; et \; v_{i,j}(\varepsilon_k) = O_E \; si \; k \neq i.$$

3.1. Prouver que $v_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_u.

3.2. En déduire que φ_u est diagonalisable.

3.3. Soient λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_r les valeurs propres de u deux à deux distinctes et $V(\lambda_1)$, $\cdots$, $V(\lambda_r)$ les sous-espaces propres associés de dimensions respectives n_1, $\cdots$, n_r.

3.3.1. Quelle relation vérifient n, n_1, $\cdots$, n_r?

3.3.2. Exprimer la dimension de $Ker(\varphi_u)$ et le rang de φ_u en fonction de n_1, $\cdots$, n_r.

4. Etude du cas où φ_u est diagonalisable.
On suppose maintenant que φ_u est diagonalisable.

4.1. Soit x un vecteur donné de E, non nul.

4.1.1. Montrer que : $\forall y \in E$, $\exists w \in L(E)$ tel que $y = w(x)$.

4.1.2. Montrer qu'iI existe une base de E notée $B(x)$ telle que : $B(x) = (v_k(x))_{1 \le k \le n}$, où $\forall k \in [1; n]$, v_k est un vecteur propre de φ_u .

4.2. Démontrer que u est diagonalisable.

4.3. Montrer que : $\varphi_u = O_{L(E)} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \mid u = \lambda.id_E$.

5. Une propriété des vecteurs propres de φ_u.
Dans cette partie, on suppose que φ_u admet une valeur propre non nulle $\lambda \in \mathbb{C}^\star$ et v désigne un vecteur propre, non nul, de φ_u associé à λ.

5.1.1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, v^k est un vecteur propre de φ_u et préciser la valeur propre associée.

5.1.2. En déduire que v est un endomorphisme nilpotent. Quel est l'indice maximal de v?

5.2. Dans cette question, on suppose que v est nilpotent d'indice n.

5.2.1. Montrer que pour tout naturel k tel que : $1 \leq k \leq n-1$, $dim(Ker(v^k) < dim(Ker(v^{k+1}))$.

5.2.2. Pour tout naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, déterminer $dim(Ker(v^k))$.

5.2.3. Démontrer que φ_u est diagonalisable.

Problème 2

les nombres d'Euler

• n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 3 . Soit $\Omega_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un ensemble de n nombres réels dont les indices sont choisis de telle sorte que $1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow x_k < x_{k+1}$

• Un zigzag de Ω_n est une permutation $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$ des n nombres de Ω_n de sorte que les signes des quantités $\sigma_{(k+1)} - x_{\sigma(k)}$ alternent en fonction de k : si $1 < k < n$, les signes de $\sigma_{(k+1)} - x_{\sigma(k)}$ et de $\sigma_{(k)} - x_{\sigma(k-1)}$ sont opposés.

• Un zigzag de Ω_n est appelé de première espèce lorsque $x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)}$ et de seconde espèce lorsque $x_{\sigma(1)} > x_{\sigma(2)}$.

• Par exemple $(4, 3, 5, 1, 2)$ est un zigzag de seconde espèce de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; par contre $(2, 5, 1, 3, 4)$ n'est pas un zigzag.

• On note $E_n(\Omega_n)$ le nombre de zigzags de première espèce et $E'_n(\Omega_n)$ le nombre de zigzags de seconde espèce des nombres de Ω_n.

• Pour $n = 2$, on conviendra que $E_2(\Omega_2) = E'_2(\Omega_2) = 1$; $(1, 2)$ et $(2, 1)$ seront considérés comme des zigzags, respectivement de première et de seconde espèce de $\Omega_2 = \{1, 2\}$.

• Pour $n = 1$, on conviendra que $E_1(\Omega_1) = E'_1(\Omega_1) = 1$; (1) seront considéré comme un zigzag de première espèce et un zigzag de seconde espèce de $\Omega_1 = \{1\}$.

•Pour x réel, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

1. Une formule de récurrence pour calculer les nombres d'Euler

1.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$; démontrer que $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$ est un zigzag de première espèce de Ω_n si et seulement si $(\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$ est un zigzag de première espèce de l'ensemble $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$.

1.1.2. En déduire que le nombre de zigzags de première espèce de Ω_n est égal au nombre de zigzags de première espèce de I_n.

On notera cette valeur commune : $E_n = E_n(\Omega_n) = E_n(I_n)$ et on posera $E_0 = 1$; les nombres E_n ainsi définis sont appelés nombres d'Euler.

1.2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, E'_n(\Omega_n) = E_n$.

1.3. Par un recensement des zigzags correspondants, calculer E_3, E_4 et E_5.

1.4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1})$ un zigzag de première espèce des nombres de I_{n+1} :

1.4.1. Si $a_i = 1$, montrer que i est impair, soit $i = 2k + 1$.

1.4.2. Montrer que $(a_1, a_2, \cdots, a_{2k})$ est un zigzag de première espèce si $k > 0$.

1.4.3. Montrer que $(a_{2k+2}, a_{2k+3}, \cdots, a_{n+1})$ est un zigzag de seconde espèce si $2k < n$.

1.4.4. En déduire la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, E_{n+1} = \sum_{k=0}^{n/2} C_n^{2k} E_{2k} E_{n-2k} \tag{1}$$

1.5.1. Par un raisonnement analogue sur la place du nombre $n+1$ dans un zigzag de première espèce de I_{n+1}, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, E_{n+1} = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} C_n^{2k+1} E_{2k+1} E_{n-1-2k} \tag{2}$$

1.5.2. Montrer que la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} E_0 = 1 \\ E_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^\star, E_{n+1} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k E_k E_{n-k} \end{cases} \tag{3}$$

2. Lien avec une équation différentielle

Une urne contient n, $(n \in \mathbb{N})$ boules numérotées de 1 à n. On effectue une suite de tirages sans remise des n boules. On note a_n la probabilité que la suite des n numéros obtenus soit un zigzag de première espèce de I_n.

2.1. Calculer a_n en fonction de E_n et de n. On pose $a_0 = 1$. Trouver une formule de récurrence permettant de calculer les nombres a_n.

2.2. Démontrer que $0 < a_n \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2.3. Démontrer que le rayon de convergence R de la série entière de terme général $u_n = a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
On note $S(x)$ la somme de cette série sur l'intervalle $]-R, +R[$.

2.4. Démontrer que S est solution de l'équation différentielle : $2y' = y^2 + 1$ sur l'intervalle $]-R, +R[$.

2.5. Calculer $S(x)$ pour $x \in]-R, +R[$.

3. Développements en séries entières

3.1.1. Démontrer que $\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\cos(x)}+\tan(x)$ pour $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, k entier relatif.

3.1.2. Donner, en utilisant les nombres d'Euler, les développements en séries entières des fonctions $x\mapsto\tan(x)$ et $x\mapsto\frac{1}{\cos(x)}$ sur l'intervalle $]-R,+R[$.

3.1.3. Quelle est la valeur de la dérivée d'ordre n en 0 de la fonction tan ?

3.1.4. Montrer que $1\leq R\leq\frac{\pi}{2}$.

3.2. Trouver un développement limité d'ordre 5 de la fonction S au voisinage de 0.

3.3. Si l'urne de la deuxième partie contient 5 boules, quelle est la probabilité pour qu'une suite de tirages sans remise des 5 boules ne donne pas de zigzag ?

3.4. En utilisant des relations simples liant les fonctions tan, $\frac{1}{\cos}$, sin et cos, démontrer les relations

$$\forall n\in\mathbb{N},\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n+1}^{2k+1}E_{2k+1}=1 \tag{4}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n}^{2k}E_{2k}=0 \tag{5}$$

3.5. A l'aide de ces formules, calculer E_6 et E_7.

3.6. En utilisant les nombres d'Euler, trouver les développements en séries entières des fonctions $\varphi\ :\ x\mapsto\frac{2e^x}{e^{2x}+1}$ et $\psi\ :\ x\mapsto\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ sur $]-R,+R[$.

——— $\mathcal{FIN}$ ———