CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT
DE L'ENSEIGNEMENT AGRICOLE
CAPESA SESSION 2001

Concours EXTERNE

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Coefficient : 2,5 Durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisée.

Le thème de ce problème est l'approche, par plusieurs outils mathématiques, du nombre réel π^2 dont on montrera l'irrationalité.

• Le problème est divisé en cinq parties notées respectivement Préliminaires, A, B, C, D ; ces quatre dernières parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.
• Dans les préliminaires, la partie notée Pr(B) (respectivement Pr(C)) regroupe les items dont les résultats vous serviront dans la partie B (respectivement C).
• Le signe ✓ indique que la question s'éloigne du thème principal du problème.
• Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$, on note $A \left| \begin{array}{c} 1/4 \\ 0 \end{array} \right.$ et $A \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1/2 \end{array} \right.$ et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique. La fonction cotangente est notée cot.

Préliminaires

Pr(B)

1. Préciser pourquoi la fonction cotangente est une bijection de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}]$ sur $[0; +\infty[$.

2. Si P est un polynôme de degré p à coefficients complexes, $P = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_0$, ayant pour racines $z_1, \cdots, z_p$, donner la formule liant $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} z_k$ aux coeflicients a_1.

3. Démontrer que pour tout réel x de $]0; \frac{\pi}{2}]$, on a : $\cot x \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sin x}$.

4.✓ Donner une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}_A$ centré en A passant par B et préciser les points d'intersection de ce cercle avec l'axe des abscisses.

5. Pour x réel non nul, on pose : $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

5.a) Prouver que g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Pour simplifier les notations, ce prolongement sera encore noté g dans la suite.

5.b) Quelle est alors la valeur de $g(0)$?

5.c) Etudier la dérivabilité de g en 0.

5.d) Après avoir donné les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$, donner le tableau de variations de g (on pourra être amené à étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de $h : x \mapsto (1 - x)e^x - 1$).

5.e) ✓ Démontrer que la courbe représentative de g dans le repère R admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote dont on donnera une équation cartésienne.

Pr(C)

1.★Soit u continue sur l'intervalle $[0;1]$, montrer que, si U est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$U(x) = \int_0^1 u(t)\cos(xt)dt,$$

alors, U est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\ x \in \mathbb{R}, U'(x) = -\int_0^1 u(t)\sin(xt)dt$.

★ Il y a plusieurs méthodes pour parvenir à ce résultat, l'une d'elles consiste à revenir à la définition du nombre dérivé en un point et à utiliser l'inégalité (qu'on justifiera) valable pour tous réels a et b :

$$|\cos b - \cos a + (b-a)\sin a| \leq \frac{(b-a)^2}{2}.$$

2. Soit P une fonction polynôme à coefficients réels. Montrer que la fonction P est paire si et seulement si elle est combinaison linéaire de fonctions monômes de degrés pairs.

3. Soient P et Q deux fonctions polynômes à coefficients réels telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x)\cos x + Q(x)\sin x = 0.$$

Démontrer que P et Q sont nulles.

Partie A

Un algorithme n'utilisant que des opérations dites élémentaires.

On se propose de définir deux suites de réels $(c_n)_{n\geq 1}$ et $(s_n)_{n\geq 1}$ en posant :

$$\begin{cases} c_1 = 0 \ et \ s_1 = 4 \\ \forall n \geq 1,\ c_{n+1} = \dfrac{1+\sqrt{c_n}}{2} \ et \ s_{n+1} = \dfrac{s_n}{c_{n+1}} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $\begin{cases} c_n = \cos^2 \dfrac{\pi}{2^n} \\ s_n = 4^n \sin^2 \dfrac{\pi}{2^n} \end{cases}$

2. Déterminer Ia limite de la suite $(s_n)_{n\geq 1}$.

3.a) Justifier l'assertion suivante : $\forall x > 0, \exists y \in]0;x[\ /\ \sin x = x - \dfrac{x^3}{6}\cos y.$

3.b) On sait que pour $x \geq 0$, $|\sin x| \leq x$. En déduire l'existence d'une constante rationnelle M telle que pour tout entier n, $n \geq 1,\ |s_n - \pi^2| \leq \dfrac{M}{4n}$

4. Soit $\begin{array}{rccl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \end{array}$

4.a) Donner le développement limité à l'ordre 6 de f en 0.

4.b) Démontrer que s_n admet le développement asymptotique suivant :

$$s_n = \pi^2 - \frac{1}{3}.\frac{\pi^4}{4^n} + \frac{2}{45}.\frac{\pi^6}{16^n} + o\left(\frac{1}{16^n}\right)$$

5. On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $t_n = \dfrac{-s_n + 4s_{n+1}}{3}$.

5.a) Déterminer la limite de la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ ainsi qu'un équivalent de $|t_n - \pi^2|$.

5.b) Justifier que la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ converge plus vite vers sa limite que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$.

Partie B

π^2 en tant que somme de série ou comme intégrale

Dans toute cette partie, n désigne un entier strictement positif.

1. Pour $1 \leq k \leq n$, on pose : $r_k = \cot^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}$. Prouver que ces nombres sont deux à deux distincts.

2. En utilisant la fomule de Moivre, établir l'égalité suivante, valable pour tout réel a :

$$C_{2n+1}^1 \sin a \cos^{2n} a - C_{2n+1}^3 \sin^3 a \cos^{2n-2} a + \ \cdots \ + (-1)^n C_{2n+1}^{2n+1} \sin^{2n+1} a = \sin(2n+1)a$$

3.a) A l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe une fonction polynôme à coefficients réels notée P_n que l'on explicitera, telle que pour tout réel a non multiple de π, on ait :

$$\frac{\sin(2n+1)a}{\sin^{2n+1} a} = P_n\left(\cot^2 a\right).$$

3.b) Etablir l'unicité d'un tel polynôme P_n.

3.c) Déterminer les racines du polynôme P_n.

4.a) Calculer le nombre $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k = \sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1}$.

4.b) En déduire la valeur de T, où $T = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$.

5. Après avoir encadré $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, retrouver le célèbre résultat dû à Euler : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6. calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

7.✓ Plaçons nous dans le cas particulier où $n = 2$.

7.a) Exprimer $\cot \dfrac{\pi}{5}$ puis $\cos \dfrac{\pi}{5}$ à l'aide de radicaux. En déduire que $\cos \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

7.b) Proposer une construction à la règle et au compas d'un décagone régulier.

8.a) g désignant toujours la fonction définie en PR(B), justifier l'existence de l'intégrale généralisée $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx$.

8.b) On pose, pour n entier strictement positif, $K_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x.e^{-nx}dx$. Calculer K_n après avoir justifié son existence.

8.c) Vérifier que pour tout x non nul, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{-kx} = \frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}$; en déduire que :

$$K = 1 + \frac{1}{4} + \ \cdots \ + \frac{1}{n^2} + \int_0^{+\infty} g(x).e^{-nx}dx$$

8.d) Montrer que $K = \dfrac{\pi^2}{6}$

Partie C

Irrationalité de π^2

1. On pose, pour tout réel x et pour tout entier naturel n ($n \geq 1$),

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}.\int_0^1 (1-t^2)^n \cos(xt)dt.$$

1.a) Calculer f'_n sur $\mathbb{R}$ en justifiant.

1.b) Donner un lien algébrique entre f_{n+1}, f_n et f'_n.

2. Calculer $f_1(x)$ pour tout réel x.

3. Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n ($n \geq 1$), il existe un unique couple de fonctions polynômes (A_n, B_n) à coefficients entiers tel que :
⊙ $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = A_n(x)\cos x + B_n(x)\sin x$,
⊙ A_n est impaire et B_n est paire,
⊙ les degrés de A_n et de B_n sont inférieurs ou égaux à n.

4. Supposons que l'on puisse écrire $\dfrac{\pi^2}{4} = \dfrac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls...

Montrer qu'alors, le nombre u_n défini par $u_n = q^n\sqrt{\dfrac{p}{q}}.\dfrac{\left(\frac{p}{q}\right)^{2n}}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}.\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{2n}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt$ est un entier naturel non nul.

5. En considérant la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, démontrer que π^2 est irrationnel.

Partie D

π^2 et les séries entières

Dans cette partie, on étudie la série entière $\sum 2\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2}$; en cas de convergence de cette série, on posera $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2}$. On notera enfin pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+2)!}$.

1. Calculer le quotient $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ et donner le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^{2n+2}$.

2.a) Déterminer les constantes a et b telles que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a + \dfrac{b}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2.b) Pour $n \geq 1$, on pose $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et $w_n = n^{-5/4}$. Montrer que, pour n assez grand :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n}.$$

2.c) En déduire l'existence de deux constantes strictement positives c et d (qu'on ne cherchera pas à préciser) telles que, pour n assez grand : $cv_n \leq a_n \leq dw_n$.

2.d) Que peut-on en déduire sur la convergence de la série $\sum a_n$?

3. Justifier avec soin que $\lim\limits_{x \to 1} F(x) = \sum a_n$.

4. Le but de cette question est d'expliciter la fonction F. On pose, $G(x) = (\arcsin x)^2$, quand c'est possible.

4.a) Donner l'ensemble de définition de la fonction G. Sur quelle intervalle I, la fonction G est-elle dérivable et même de classe C^∞?

4.b) Vérifier que G est solution sur I de l'équation différentielle notée (L) :

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) = 2.$$

4.c) Calculer les nombres $F(0)$, $F'(0)$, $G(0)$, $G'(0)$.

4.d) Démontrer que $\forall x \in I, F(x) = G(x)$.

5.a) Déterminer la somme de chacune des deux séries numériques $\sum \dfrac{a_n}{4^n}$ et $\sum a_n$.

5.b) On pose, pour tout entier n, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{4^k}$ et $R'_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Prouver alors que :

⊙ $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq R_n \leq \dfrac{1}{3.4^n}$

⊙ pour n assez grand, $R'_n \geq \dfrac{c}{n+1}$ (c a été défini dans la question D 2.c)).

5.c) Commenter les résultats établis à la question 5.b).

——— *FIN* ———