INTEGRATION : Niveau BCPST

Exercices tirés des oraux du concours INA-ENSA

Jury 1

Exercice 1 : Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x}{t}} x^n dx$

Exercice 2 : Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{1+\sqrt{1+t}}{1+t}$

Exercice 3 : Trouver α et β tels que l'intégrale $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln x|^\alpha}{(1-x)^\beta} dx$ converge.

Exercice 4 : Etudier la fonction $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

Exercice 5 : Trouver λ tel que $\displaystyle\int \frac{\lambda x^2 + x + 1}{x^3} e^x dx$ soit de la forme $f(x)e^x$ avec $f(x)$ une fraction rationnelle.

Exercice 6 : Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varphi + \sin^2\varphi}$ (On peut poser $t = \tan\varphi$)

Exercice 7 : Etudier $\displaystyle\int_0^x \frac{d\varphi}{\varphi + \sin^2\varphi}$

Exercice 8 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}}$

Exercice 9 : Calculer $\displaystyle\int_0^{\cos\alpha} \frac{x^2\cos\alpha}{x^4 - 2x^2\cos 2\alpha + 0}$

Exercice 10 : Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} dx$

Exercice 11 : Etude de $f(x) = \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\sinh t}{t} dt$

Exercice 12 : Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

Jury 2

Exercice 1 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x^2(1-x)} dx$

Exercice 2 : Calcul et convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1}$

Exercice 3 : Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

Exercice 4 : Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cot x} dx$

Exercice 5 : Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^3+1)^n}$ avec $n \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 : Etudier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$

Exercice 7 : Soient $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{-\sin^2 x}dx$.
1) Etudier la convergence de I_n et J_n.
2) Calculer I_n et J_n.

Exercice 8 : Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(2+\cos t)^2}$

Exercice 9 : Etudier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x.dx}{(1+x}) \sqrt{1-x^2}$

Exercice 10 : Soit $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\alpha^3 + x^3}$ avec $\alpha > 0$.
Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} I(\alpha)$ et donner un équivalent simple de $I(\alpha)$ en 0.
(2 méthodes : intégration directe ou avec changement de variable en $x = \alpha t$)

Exercice 11 : Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{2+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$

Exercice 12 : Etudier la convergence et calculer éventuellement $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln t}{(1-t^2)^{3/2}}dt$

Exercice 13 : Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{(1+\sin^2 x)^2}$

Exercice 14 : Etudier la convergence et calculer la valeur de $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-x+1)^n}$. En déduire la nature de la série $(\sum I_n)$.

Exercice 15 : Convergence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x} \right) dx$

Jury 3

Exercice 1 : Calculer $\displaystyle\int \frac{\tan x}{1+\tan x}dx$

Exercice 2 : Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x + \cos^3 x}$

Exercice 3 : Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+4)\sqrt{1-t^2}}$

Exercice 4 : soit $f(\theta) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos\theta\cos t}$ avec $\theta \in [0;\pi]$.
Etudier la convergence et déterminer $f(\theta)$. Tracer le graphe de $f(\theta)$.

Exercice 5 : Calcul de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^3+1)^n}$

Exercice 6 : Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 t + \cos^4 t}{\sin^6 t + \cos^6 t} dt$. (Noter que $x^6 + 1 = (x^2 - 1)(x^4 - x^2 + 1)$)

Exercice 7 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^{2n} \ln x dx$ puis $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1 + x^2} dx$

Exercice 8 : Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x + t^2 \cos^2 x}}$

Exercice 9 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t \; dt}{(1 + t)^2}$

Exercice 10 : Etudier en 1 la primitive $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$

Exercice 11 : Intégration de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx$

Jury 4 : Ces exercices sont un peu plus difficiles.

Exercice 1 : Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln x - \ln(1 - e^{-x})) \frac{e^{-\alpha x}}{x} dx$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^-$

Exercice 2 : Etudier la nature de l'intégrale $I(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (1 + x^\beta)}$ avec $(\alpha, \beta) \in {\mathbb{R}^+}^2$.
Calculer $I(1, \beta)$. (Poser $u = x^\beta$)

Exercice 3 : Etudier l'existence et calculer en fonction de α et β de $\mathbb{R}$ l'intégrale définie par $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2 + \beta x} dx$.

Exercice 4 : Nature des intégrales $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^3(1 + x)}{x^{\frac{4}{3}}} dx$ et $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(t - 1)^\alpha}{\ln t} dt$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 5 : Etudier la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^u e^{-u^2} du$.

Exercice 6 : Etude et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^{2+1)^2}} dx$.

Exercice 7 : Déterminer l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t + 1)}$.

Exercice 8 : Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x . \sin 2nx . dx$.
1) Déterminer les valeurs de n pour que I_n existe.
2) Calculer $I_n + I_{n-1}$ puis déterminer I_n.

Exercice 9 : Calculer, si elle existe, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1 - x}} dx$.