

## Mathématiques : Niveau BCPST

### Oraux de concours II

#### ETUDE ET GRAPHE DE FONCTIONS

**Exercice 1** : Etudier et tracer  $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

**Exercice 2** : Etudier les variations de  $g(x) = (x^2 - 1) \cdot \ln \left( \frac{x+1}{x} \right)$  et tracer son graphe.

**Exercice 3** : Etudier les variations de  $h(x) = \frac{x \cdot \ln x}{x^2 - 1}$ . Tracer son graphe.

**Exercice 4** : Etudier et tracer le graphe de  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x} \cdot e^{-1/x}$ .

**Exercice 5** : Etudier et tracer le graphe de  $k(x) = \sqrt{\frac{x}{\ln x}}$ .

#### FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES

**Exercice 6** : Soit  $u = \arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{z} + \arctan \frac{z}{x}$ .

Montrer que  $\Delta(x, y, z) = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2} = 0$

**Exercice 7** : Soit  $\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + y \cdot \frac{1 - x^2 + y^2}{x^2 + y^2} dy$ . Montrer qu'il s'agit de la différentielle d'une fonction  $f$ . Déterminer cette fonction  $f$ .

**Exercice 8** : Soit  $\omega = [(xy - y^2 - x)dx + (xy - y - x^2)dy] \mathcal{S}(x, y)$ . Calculer  $\mathcal{S}(x, y)$  pour que  $\omega$  soit une différentielle totale. Déterminer alors  $f$  tel que  $df = \omega$ .

#### EQUATIONS DIFFERENTIELLES

**Exercice 9** : Résoudre  $y' - \frac{x}{1-x} \cdot y = \frac{x}{1-x} \cdot e^{-x}$ .

**Exercice 10** : Résoudre (E)  $y' + 2y = \frac{x}{\sqrt{y}}$ .

**Exercice 11** : Discuter et résoudre en fonction de  $m \in \mathbb{R}$  l'équation différentielle suivante :  $my'' - (1 + m^2)y' + my = xe^x$ .

**Exercice 12** : Résoudre  $y'' - 2y' + 5y = e^x \cdot \cos(2x)$ .

**Exercice 13** : Déterminer les solutions de l'équation différentielle  $xy' - y = x^2 - 3$ .

#### SERIES ENTIERES

**Exercice 14** : Etudier la série de terme général  $U_n = n \cdot e^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 15** : Etudier la série de terme général  $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n\sqrt{n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

**Exercice 16** : Etude de la convergence et de la somme de la série entière définie par le terme général  $U_n = \frac{x^n}{n} \cdot \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ .